

Deutsches Zentrum
für Luft- und Raumfahrt e.V.

Das Adjungiertenverfahren in der aerodynamischen Formoptimierung

Nicolas Ralph Gauger

Institut für Aerodynamik und
Strömungstechnik
Braunschweig



Das Adjungiertenverfahren in der aerodynamischen Formoptimierung

Nicolas Ralph Gauger

Institut für Aerodynamik und
Strömungstechnik
Braunschweig

102 Seiten
39 Bilder
3 Tabellen
75 Literaturstellen

Das Adjungiertenverfahren in der aerodynamischen Formoptimierung

Deutsches Zentrum
für Luft- und Raumfahrt e.V.

Abstract

The so-called adjoint approach for deterministic gradient based aerodynamic shape optimization enables an efficient evaluation of the derivatives of the cost function of the optimization problem with respect to the design variables. Contrary to the conventional finite differences approach the adjoint approach is independent of the number of design variables with respect to the numerical costs. Only one flow and one adjoint flow calculation are needed in case of the adjoint approach, which means, when one has a high number of design variables, a dramatic reduction in costly, numerically intensive flow calculations.

To begin, the adjoint approach is introduced and explained by the example of the discrete adjoint of linear equations. The advantages of this approach are highlighted. Then, as a natural extension of the previous example, the continuous adjoint approach is presented and a method to construct adjoint boundary operators is worked out. Well-posedness of the adjoint formulation is considered.

The use of the adjoint approach in aerodynamic shape optimization is explained in detail using the Euler equations for control. The characteristics of the adjoint Euler equations are investigated. The cost functions are drag, lift, and pitching moment. In addition to the well known volume formulation for the gradient of the cost function, a new, more practically applicable surface formulation is derived and proved numerically.

The implementation of an adjoint solver in the RANS solver FLOWer is explained. The adjoint solver is validated and applied to several aerodynamic shape optimization problems.

Zusammenfassung

Die sogenannten Adjungiertenverfahren zur deterministischen gradientenbasierten aerodynamischen Formoptimierung ermöglichen eine effiziente Bestimmung der Ableitungen der Zielfunktion der Optimierungsaufgabe nach den Entwurfsvariablen. Im Gegensatz zu den herkömmlichen Finite-Differenzen-Verfahren ist das Adjungiertenverfahren unabhängig von der Anzahl der Entwurfsvariablen hinsichtlich des numerischen Aufwandes. Es wird beim Adjungiertenverfahren nur eine Strömungs- und eine adjungierte Strömungsberechnung benötigt, was eine drastische Reduzierung an numerisch aufwendigen Strömungsberechnungen für eine hohe Anzahl an Entwurfsvariablen mit sich bringt.

Zunächst werden anhand der diskreten Adjungierten für lineare Gleichungen das Adjungiertenverfahren eingeführt, erklärt und seine Vorteile erläutert. Als eine natürliche Erweiterung wird sodann das kontinuierliche Adjungiertenverfahren vorgestellt und ein Verfahren zur Konstruktion adjungierter Randoperatoren erarbeitet. Überlegungen zur Wohlgestelltheit adjungierter Problemformulierungen werden vorgenommen.

Der Einsatz des Adjungiertenverfahrens in der aerodynamischen Formoptimierung wird im Detail für die Euler-Gleichungen als Kontrollgleichungen erklärt, sowie die Eigenschaften der adjungierten Euler-Gleichungen untersucht. Die Zielgrößen sind hierbei der Widerstand, der Auftrieb sowie das Nickmoment. Neben der bekannten Volumenformulierung der Gradienten der Zielgrößen wird eine neue, praktikablere Oberflächenformulierung hergeleitet und numerisch erprobt.

Die Implementierung eines adjungierten Euler-Lösers in den RANS-Löser FLOWer wird erklärt und dessen Validierung und Einsatz in der aerodynamischen Formoptimierung dargelegt.

Vom Fachbereich für Mathematik und Informatik
der Technischen Universität Braunschweig
genehmigte Dissertation
zur Erlangung des Grades
Doktor der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.)

Autor: **Dipl.–Math. Nicolas Ralph Gauger**

Titel: **Das Adjungiertenverfahren in der
aerodynamischen Formoptimierung**

Eingereicht am:	24. Juli 2003
Mündliche Prüfung am:	04. November 2003
Referent:	Prof. Dr. rer. nat. habil. Th. Sonar
Korreferenten:	Prof. H. Matthies, Ph.D. Prof. A. Griewank, Ph.D.

Eidesstattliche Erklärung

Hiermit erkläre ich an Eides statt, daß ich die vorliegende Arbeit selbständig angefertigt habe. Alle benutzten Hilfsmittel sind angegeben. Diese Arbeit ist bisher weder veröffentlicht noch an einer anderen Hochschule zum Zweck der Promotion oder als sonstige Prüfungsarbeit eingereicht worden.

Braunschweig, im Juli 2003

Inhaltsverzeichnis

1	Vorwort	1
2	Einleitung	2
3	Das duale oder adjungierte Problem	5
3.1	Die diskrete Adjungierte	5
3.1.1	Die diskrete Adjungierte für lineare Gleichungen	5
3.1.2	Eine physikalische Interpretation	6
3.2	Die kontinuierliche Adjungierte	6
3.2.1	Die adjungierte partielle Differentialgleichung	6
3.2.2	Beispiele	7
3.2.3	Eine physikalische Interpretation	8
3.2.4	Die inhomogenen adjungierten Randbedingungen	9
3.2.5	Beispiele	14
4	Aerodynamische Formoptimierung	17
4.1	Die Euler-Gleichungen	17
4.2	Die aerodynamischen Beiwerte	20
4.3	Aerodynamische Formoptimierung	21
4.3.1	Geometrieparametrisierung	21
4.3.2	Aerodynamische Formoptimierungsprobleme, Zielfunktionen und Nebenbedingungen	23
4.3.3	Restringierte Optimierungsstrategien	23
4.4	Berechnung der Gradienten der Zielfunktionen und Nebenbedingungen	27
4.4.1	Finite Differenzen	27
4.4.2	Duale diskrete Formulierung	28
4.4.3	Lagrangesche kontinuierliche Formulierung	29
4.4.4	Formulierung der kontinuierlichen adjungierten Euler-Gleichungen und Randbedingungen	30

4.4.5	Berechnung der Gradienten der Zielfunktionen und Nebenbedingungen	36
4.5	Eigenschaften der (adjungierten) Euler-Gleichungen und Randbedingungen	40
4.5.1	Eigenschaften der (quasi-)instationären Euler-Gleichungen	41
4.5.2	Eigenschaften der (quasi-)instationären adjungierten Euler-Gleichungen	46
4.5.3	Die adjungierten Euler-Randoperatoren	46
5	Numerische Behandlung der Euler- und adjungierten Euler-Gleichungen in FLOWer	61
5.1	Finite Volumenmethode zur Lösung der Euler-Gleichungen	62
5.1.1	Räumliche und zeitliche Diskretisierung	62
5.1.2	Ordnung der räumlichen Diskretisierung	65
5.1.3	Stabilitätsanalyse	65
5.1.4	Numerische Dissipation	68
5.2	Finite Volumenmethode zur Lösung der adjungierten Euler-Gleichungen	69
5.2.1	Räumliche und zeitliche Diskretisierung	69
5.2.2	Ordnung, Stabilität und numerische Dissipation	72
6	Validierung und Einsatz von FLOWer ADJOINT in der aerodynamischen Formoptimierung	73
7	Zusammenfassung und Ausblick	95

1 Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meines Promotionsstipendiats und der anschließenden Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Aerodynamik und Strömungstechnik des Deutschen Zentrums für Luft- und Raumfahrt e.V., Standort Braunschweig/Göttingen.

Bei Herrn Prof. Th. Sonar möchte ich mich an dieser Stelle herzlich für die Betreuung der Arbeit bedanken, insbesondere für seine motivierende Art zu Beginn der Arbeit. Motivation die ich, des Debuggens müde, mehr als nötig hatte.

Den Herren Prof. H. Matthies sowie Prof. A. Griewank danke ich für die Übernahme der Aufgabe als Mitberichterstatter. Herrn Prof. A. Griewank verdanke ich ferner zahlreiche Einladungen zu internationalen Konferenzen, die mir viele neue Eindrücke und einen weiteren Horizont für meine Arbeit verschafft haben.

Bei Herrn Prof. M. Giles möchte ich mich für den freundlichen und fruchtbaren E-Mail-Austausch, Kapitel 3 dieser Arbeit betreffend, bedanken.

Ich danke den Herren Prof. H. Körner, bis vor kurzem Leiter des Instituts für Aerodynamik und Strömungstechnik, sowie meinem Abteilungsleiter Prof. N. Kroll für die Möglichkeit, diese Arbeit an unserem Institut durchführen zu können.

Es sei hier kurz erwähnt, daß ich aufgrund des derzeit regen Interesses an Adjungiertenverfahren in der Luftfahrt bereits nach einem Jahr und acht Monaten in einem EU-Projekt mitarbeiten durfte. Herrn Prof. N. Kroll verdanke ich diese Chance sowie die daraus nicht selbstverständlich resultierende Übernahme als wissenschaftlicher Mitarbeiter auf einer vollen Stelle mit dennoch genügend Freiräumen für die Fertigstellung dieser Arbeit.

Einen erheblichen Anteil daran, daß diese Freiräume blieben, hatten dabei mein ehemaliger Kollege Dipl.-Ing. Th. Wienberg sowie mein Kollege Dipl.-Ing. J. Brezillon, mit denen ich in dem EU-Projekt zusammengearbeitet habe.

Meinem ehemaligen Kollegen, Herrn Dipl.-Math. G. Seidler, danke ich für ein erstes Korrekturlesen der Arbeit.

Es soll hier nicht unerwähnt bleiben, daß neben der fachlichen Betreuung auch die Anteilnahme und Unterstützung des privaten Umfeldes einen großen Anteil zum Gelingen einer solchen Arbeit beiträgt. Hierfür möchte ich insbesondere meiner Partnerin Sabine herzlich danken.

Gewidmet
Jürgen Dehnhardt

2 Einleitung

Die sogenannten Adjungierten spielen in vielen Bereichen der Mathematik und in den unterschiedlichsten Anwendungen aus der Praxis eine entscheidende Rolle. Sie werden in den verschiedenen Disziplinen allerdings nicht einheitlich bezeichnet. Im Anwendungsbereich der Adaptivität und Gittersteuerung [BR01] werden sie als duale Variablen bezeichnet, bei der Fehlerschätzung [EEHJ95] als Green'sche Funktion bzw. als Einflußfunktion und im Arbeitsumfeld der Neuronalen Netze [RHW86] bezeichnet man den Einsatz von Adjungierten als Backpropagation Methods. Als Adjungierte werden sie gerade bei der Optimierung mit partiellen Differentialgleichungen, also in der Kontrolltheorie, bezeichnet. Diese Disziplin wurde im Wesentlichen durch Lions begründet [Lio71].

Der erste, der Adjungierte für Kontrollprobleme in der Strömungsmechanik nutzte, war Pironneau [Pir74]. In der aerodynamischen Formoptimierung wurden Adjungierte zuerst von Jameson, zunächst für die Potentialgleichungen, eingesetzt [Jam88]. In weiteren Arbeiten von Jameson [Jam89, Jam94, Jam95a, Jam95b, Jam99] wird deren Einsatz für die Euler-Gleichungen beschrieben. Einer großen und weltweit wohl führenden Gruppe um Jameson herum ist schliesslich bereits der Einsatz von Adjungierten bei der durch die Navier-Stokes-Gleichungen kontrollierten aerodynamischen Formoptimierung sowie deren Anwendung auf komplexere aerodynamische Konfigurationen gelungen [RJF⁺96, JMP98, RJA⁺99a, RJA⁺99b, NJ01, KAJ02]. Dort beginnt man bereits mit dem Einsatz von Adjungierten für gekoppelte Aero-Struktur-Systeme [AMR01, AMR02]. Auch andere Forschungsgruppen haben an der Entwicklung von adjungierten CFD-Lösern (CFD - Computational Fluid Dynamics) für die aerodynamische Optimierung gearbeitet. So z.B. die Gruppen um Cabuk [CSM91], Korivi [KIH91], Ta'asan [TKS92], Baysal und Eleshaky [BE92], Huffman [HMY⁺93], Lewis und Agarwal [LA95], Anderson und Venkatakrishnan [AV99] sowie Dadone und Grossmann [DG99].

Noch bis heute werden in der Flugzeugindustrie eher heuristische bis sehr einfache Verfahren zur aerodynamischen Formoptimierung eingesetzt. Die Verbesserungen, die man mit diesen Ingenieursmethoden erzielen kann, sind mittlerweile weitestgehend ausgereizt. Im industriellen Flugzeugentwurf wird deshalb in naher Zukunft die Befähigung zu einer effizienten numerischen deterministischen aerodynamischen Detailoptimierung marktentscheidend sein, um auch zukünftig noch Leistungssteigerungen erzielen zu können. So führt beispielsweise die aerodynamische Formoptimierungsaufgabe der Widerstandsreduktion zu größeren Reichweiten, geringeren Flugkosten sowie weniger Emission.

Bei der deterministischen aerodynamischen Detailoptimierung stellt sich die Frage

nach den Sensitivitäten der als Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen erhaltenen Strömungsgrößen, bei Variation der z.B. den Tragflügel oder die Turbinenschaufel beschreibenden Entwurfsvariablen. Dabei ist bereits der numerische Aufwand, gemessen in Rechenzeiten auf großen Supercomputern, für die numerische Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen bei sehr großen Reynoldszahlen und komplexen aerodynamischen Konfigurationen immens hoch. Das Lösen hierarchisch untergeordneter Gleichungen, wie z.B. der Euler- oder Potentialgleichungen, kommt im industriellen Detailentwurf jedoch nicht in Frage, da diese entscheidende physikalische Phänomene, wie etwa die der Turbulenz oder Ablösung der Strömung, nicht richtig und somit nicht aussagekräftig beschreiben. Ferner benötigt man im Detailentwurf eine hohe Anzahl an Entwurfsvariablen, um diese Effekte auch hinreichend durch die Geometrieparametrisierung auflösen zu können. Es ist also dringend erforderlich, so wenig Navier-Stokes-Nachrechnungen als irgend möglich vorzunehmen, um in dem Bereich vernünftiger Gesamt-Rechenzeiten für den aerodynamischen Entwurf zu bleiben. Für die Bereitstellung der Sensitivitäten für den aerodynamischen Entwurfs- bzw. Optimierungsprozess ist deshalb das Lösen der adjungierten Navier-Stokes-Gleichungen anzustreben, da mittels der so erhaltenen Lösung der adjungierten Navier-Stokes-Gleichungen diese Sensitivitäten nicht nur exakt ermittelt werden können sondern der numerische Aufwand für die Berechnung dieser auch unabhängig von der Anzahl der Entwurfsvariablen ist.

Bis heute besitzen jedoch weltweit die in der Flugzeugindustrie etablierten Produktionscodes keine Option zur Lösung adjungierter Strömungsgleichungen. In der europäischen Flugzeugindustrie gibt es allerdings derzeit laufende Projekte, die die Entwicklung und Implementierung von Adjungiertenlösern zum Ziel haben.

Das seit 1999 laufende und von der Airbus Deutschland GmbH unterstützte DLR-Projekt MEGAFLOW II [KRBT00, Kea01, KRS⁺02] hat zum Ziel, daß das MEGAFLOW Softwaresystem, welches in der ersten Projektphase MEGAFLOW [KRBT98] von 1995-1998 entwickelt wurde, zum zentralen dreidimensionalen numerischen Werkzeug des industriellen aerodynamischen Designs auszubauen. Schon seit Abschluß der ersten Projektphase sind sowohl der dort entwickelte blockstrukturierte RANS-Löser (RANS - Reynolds-averaged Navier-Stokes) FLOWer [KEB99] als auch der unstrukturierte RANS-Löser τ au [FHMS96, GHS99] Produktionscodes bei der Airbus Deutschland GmbH.

Ein wichtiger Bestandteil des MEGAFLOW II Projektes ist die Implementierung eines Adjungiertenlösers in den blockstrukturierten RANS-Löser FLOWer. Dabei wird mit der Implementierung eines adjungierten Euler-Lösers begonnen. Nach der Implementierung des Adjungiertenlösers in den blockstrukturierten RANS-Löser FLOWer steht dessen gesamte Infrastruktur für die Handhabung komplexer industrierelevanter Anwendungsfälle zur Verfügung. Ferner soll ein Adjungiertenverfahren entwickelt und in das MEGAFLOW Optimierungssystem, welches ebenfalls in der ersten Projektphase entwickelt wurde, integriert werden. In diesem Kontext entstand die hier vorliegende Arbeit.

In Kapitel 3 werden die grundlegenden Begrifflichkeiten eingeführt, das Adjungiertenverfahren mit seinen Vorteilen erklärt sowie Konstruktionshilfsmittel für die Aufstellung adjungierter Formulierungen bereitgestellt. Ferner werden Überlegungen zur Wohlgestelltheit adjungierter Problemformulierungen angestellt.

In dem darauffolgenden Kapitel werden zunächst die Euler-Gleichungen als die Kontrollgleichungen für die aerodynamische Formoptimierung sowie die aerodynamischen Beiwerte als Ziel- und Nebenbedingungsgrößen eingeführt. Hierbei sowie bei den folgenden theoretischen Überlegungen wird sich der Übersicht und Bequemlichkeit wegen auf die zweidimensionalen Euler-Gleichungen zurückgezogen. Dies stellt aus Symmetriegründen bekanntlich keine Einschränkung dar, zumal auch später die Implementierung für die dreidimensionalen Euler-Gleichungen vorgenommen wurde. Die verwendete Geometrieparametrisierung sowie die im späteren Validierungsteil benutzten restringierten Optimierungsstrategien werden erläutert.

Danach wird erklärt, wie die Gradienten der Zielfunktionen und Nebenbedingungen mit dem Verfahren der Finiten Differenzen sowie dem Adjungiertenverfahren berechnet werden können. Dabei wird, wie schon im vorangegangenen Kapitel, sowohl auf die kontinuierliche als auch auf die diskrete adjungierte Formulierung sowie das Automatische Differenzieren eingegangen.

Im letzten Abschnitt werden sodann die Eigenschaften der Euler- sowie der adjungierten Euler-Gleichungen untersucht. Für die linearisierten Euler-Gleichungen werden, unter Zuhilfenahme der im Beweis zu Satz 3.2.1 gefundenen Konstruktionsvorschrift, die adjungierten Randbedingungen hergeleitet. Hierbei wird eine neue, praktikablere adjungierte Formulierung für die Berechnung der Gradienten der Zielfunktionen sowie Nebenbedingungen gefunden. Muß man nach der in Abschnitt 4.4.4 hergeleiteten exakten adjungierten Formulierung noch über das gesamte Strömungsfeld integrieren um zur Gradienteninformation zu gelangen, so genügt bei der hier gefundenen adjungierten Formulierung eine Integration über die Oberfläche des zu optimierenden aerodynamischen Körpers.

In Kapitel 5 wird die numerische Behandlung der Euler- sowie der adjungierten Euler-Gleichungen in FLOWer beschrieben. Dabei wird auf die räumliche sowie die zeitliche Diskretisierung eingegangen. In einer Stabilitätsanalyse für das verwendete explizite Runge-Kutta-Verfahren wird gezeigt, daß und wie der räumlichen Diskretisierung numerische Dissipationsterme hinzugefügt werden müssen.

Bevor mit einer Zusammenfassung und einem Ausblick die Arbeit geschlossen wird, wird die Validierung des Adjungiertenlösers FLOWer ADJOINT anhand verschiedener zweidimensionaler und dreidimensionaler Testfälle vorgestellt. Schließlich wird der Einsatz von FLOWer ADJOINT für die Optimierungsaufgabe der Widerstandsreduktion bei konstantem Auftrieb und Nickmoment des transsonischen RAE2822-Profiles gezeigt.

3 Das duale oder adjungierte Problem

In diesem Kapitel werden die grundlegenden Begrifflichkeiten eingeführt, das Adjungiertenverfahren mit seinen Vorteilen erklärt sowie Konstruktionshilfsmittel für die Aufstellung adjungierter Formulierungen bereitgestellt.

Die hier dargelegten Ausführungen, Erklärungen und Beweise basieren auf den Schriften [GP00] und [Gil97] von M. Giles sowie einem regen E-Mail-Austausch zwischen M. Giles und dem Autor. Es sei hier kurz angemerkt, daß es nicht einfach ist grundlegende und übersichtliche Lehrbücher zu dem Thema der Adjungiertenverfahren zu finden. Mit [MAS96] von G. Marchuk ist allerdings ein sehr umfassendes Werk für Spezialisten vorhanden.

3.1 Die diskrete Adjungierte

3.1.1 Die diskrete Adjungierte für lineare Gleichungen

Seien $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $h \in \mathbb{R}^m$, $\varphi \in \mathbb{R}^m$, $\psi \in \mathbb{R}^n$ und $b \in \mathbb{R}^n$.

Man betrachte das folgende Problem:

$$\text{Bestimme } I = h^\top \varphi, \quad (3.1)$$

$$\text{wobei } A\varphi = b. \quad (3.2)$$

Ferner erfülle ψ die folgende Gleichung:

$$A^\top \psi = h. \quad (3.3)$$

Dann gilt unter Verwendung der Gleichungen (3.3) und (3.2)

$$I = h^\top \varphi = (A^\top \psi)^\top \varphi = \psi^\top A\varphi = \psi^\top b. \quad (3.4)$$

Es läßt sich nun also das äquivalente duale oder adjungierte Problem formulieren:

$$\text{Bestimme } I = \psi^\top b, \quad (3.5)$$

$$\text{wobei } A^\top \psi = h. \quad (3.6)$$

Der Vektor $\psi = (\psi_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$ heiße Vektor der adjungierten Variablen ψ_i .

Für $n = m \gg 1$ bedeutet das Lösen des Ausgangs- sowie des dualen Problems den gleichen numerischen Aufwand. Die Auswertung von I bedeutet jeweils einen Aufwand von n Multiplikationen, das Lösen der Gleichungssysteme jeweils einen Aufwand von

$\mathcal{O}(n^3)$ Multiplikationen.

Soll nun für k verschiedene h die Größe $I = h^\top \varphi = \psi^\top b$ für l verschiedene rechte Seiten b ausgewertet werden und ist dabei $k \ll l$, dann ist es effizienter mit dem adjungierten System zu arbeiten:

Unter Verwendung des adjungierten Systems, d.h. des Adjungiertenverfahrens, ist dann nur k -mal das Gleichungssystem (3.3) anstatt l -mal das Gleichungssystem (3.2) zu lösen und l -mal das Skalarprodukt $\psi^\top b$ auszuwerten. Der Gesamtaufwand unter Verwendung des adjungierten Systems beträgt somit $k \cdot \mathcal{O}(n^3)$ Multiplikationen und steht einem Gesamtaufwand von $l \cdot \mathcal{O}(n^3)$ Multiplikationen unter Verwendung des Ausgangssystems gegenüber ($k \cdot \mathcal{O}(n^3) \ll l \cdot \mathcal{O}(n^3)$).

3.1.2 Eine physikalische Interpretation

Das adjungierte System und die zugehörigen adjungierten Variablen sind wie eben gesehen ein mathematisches Konstrukt zur Reduktion von numerischem Aufwand - die adjungierten Variablen lassen sich aber auch physikalisch interpretieren:

Der Vektor der adjungierten Variablen ψ liefert den Einfluß einer Ursache b auf das Funktional $I = h^\top \varphi = \psi^\top b$.

Definiert man $b^{(i)} := (\delta_{ij})_{j \in \{1, \dots, n\}}$ und erhält somit $\varphi^{(i)}$ als Lösung der Gleichung

$$A\varphi^{(i)} = b^{(i)}, \quad (3.7)$$

so stellt $\varphi^{(i)}$ das diskrete Äquivalent einer Greenschen Funktion dar.

Es gilt dann ferner:

$$\psi^\top b^{(i)} = \psi_i = h^\top \varphi^{(i)}. \quad (3.8)$$

Die adjungierte Variable ψ_i ist dann der Wert des Funktionals I für die i -te Greensche Funktion $\varphi^{(i)}$, welche Gleichung (3.7) löst.

3.2 Die kontinuierliche Adjungierte

3.2.1 Die adjungierte partielle Differentialgleichung

Die kontinuierliche Duale oder Adjungierte zu einer partiellen Differentialgleichung ist eine natürliche Erweiterung der diskreten Adjungierten zu einer linearen Gleichung. Es sei $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ die Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$\mathcal{L}\varphi = b \quad (3.9)$$

im Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, die auf $\partial\Omega$ homogene Randbedingungen erfüllt. Ferner definiere man die Skalarprodukte

$$(h, \varphi)_\Omega := \int_\Omega h^\top \varphi \, dV \quad (3.10)$$

bzw.

$$(h, \varphi)_{\partial\Omega} := \int_{\partial\Omega} h^\top \varphi \, dS \quad (3.11)$$

sowie die zugehörigen Normen

$$\|\varphi\|_{L^2(\Omega)} := (\varphi, \varphi)_\Omega^{\frac{1}{2}} \quad (3.12)$$

bzw.

$$\|\varphi\|_{L^2(\partial\Omega)} := (\varphi, \varphi)_{\partial\Omega}^{\frac{1}{2}}. \quad (3.13)$$

Der zu \mathcal{L} duale oder adjungierte Operator \mathcal{L}^* ist dann wie folgt definiert:

$$\mathcal{L}^* : (\psi, \mathcal{L}\varphi)_\Omega = (\mathcal{L}^*\psi, \varphi)_\Omega \quad \forall \varphi, \psi. \quad (3.14)$$

Erfüllt nun der Vektor der adjungierten Variablen ψ die duale oder adjungierte partielle Differentialgleichung

$$\mathcal{L}^*\psi = h \quad (3.15)$$

im Gebiet Ω und auf $\partial\Omega$ ebenfalls die homogenen Randbedingungen, so gilt die folgende Beziehung:

$$(h, \varphi)_\Omega = (\mathcal{L}^*\psi, \varphi)_\Omega = (\psi, \mathcal{L}\varphi)_\Omega = (\psi, b)_\Omega. \quad (3.16)$$

Die Überlegungen aus Kapitel 3.1.1 hinsichtlich des numerischen Aufwandes können hier direkt übernommen werden. In der Regel ist es teurer ein partielles Differentialgleichungssystem $\mathcal{L}\varphi = b$ zu lösen als ein Skalarprodukt $(\psi, b)_\Omega$ zu berechnen.

3.2.2 Beispiele

Als ein Beispiel zur Konstruktion des adjungierten Operators und der adjungierten Randbedingungen betrachte man hier die eindimensionale Konvektions–Diffusionsgleichung

$$\mathcal{L}\varphi \equiv \frac{d\varphi}{dx} - \epsilon \frac{d^2\varphi}{dx^2} = b, \quad 0 < x < 1, \quad (3.17)$$

mit den homogenen Randbedingungen $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$.

Unter Verwendung der partiellen Integration für $\varphi, \psi \in \mathcal{C}^2$ folgt:

$$(\psi, \mathcal{L}\varphi)_{[0,1]} = \int_0^1 \psi \left(\frac{d\varphi}{dx} - \epsilon \frac{d^2\varphi}{dx^2} \right) dx \quad (3.18)$$

$$= \int_0^1 \varphi \left(-\frac{d\psi}{dx} - \epsilon \frac{d^2\psi}{dx^2} \right) dx + \left[\psi\varphi - \epsilon\psi \frac{d\varphi}{dx} + \epsilon\varphi \frac{d\psi}{dx} \right]_0^1 \quad (3.19)$$

$$= \int_0^1 \varphi \left(-\frac{d\psi}{dx} - \epsilon \frac{d^2\psi}{dx^2} \right) dx + \left[-\epsilon\psi \frac{d\varphi}{dx} \right]_0^1. \quad (3.20)$$

Definiert man nun die adjungierte Konvektions-Diffusionsgleichung als

$$\mathcal{L}^* \psi \equiv -\frac{d\psi}{dx} - \epsilon \frac{d^2 \psi}{dx^2} = h, \quad (3.21)$$

mit den homogenen adjungierten Randbedingungen $\psi(0) = \psi(1) = 0$, so verschwindet der Randterm in Gleichung (3.20) und es gilt Gleichung (3.16):

$$(h, \varphi)_{[0,1]} = (\mathcal{L}^* \psi, \varphi)_{[0,1]} = (\psi, \mathcal{L} \varphi)_{[0,1]} = (\psi, b)_{[0,1]}.$$

Der durch die partielle Integration verursachte Vorzeichenwechsel im ersten Term des adjungierten Operators stellt eine Umkehr der Konvektionsrichtung dar.

Wie man für weitere einfache Operator-Beispiele in Tabelle 3.1 sehen kann, dreht sich aus gleichen Gründen die Zeit-Kausalität bei zeitabhängigen Systemen um.

	Operator	Adjungierte
Konvektions-Diffusionsgleichung	$\frac{d\varphi}{dx} - \epsilon \frac{d^2 \varphi}{dx^2}$	$-\frac{d\psi}{dx} - \epsilon \frac{d^2 \psi}{dx^2}$
Laplaceoperator	$\nabla \cdot (k \nabla \varphi)$	$\nabla \cdot (k \nabla \psi)$
Wärmeleitungsgleichung	$\frac{d\varphi}{dt} - \frac{d^2 \varphi}{dx^2}$	$-\frac{d\psi}{dt} - \frac{d^2 \psi}{dx^2}$
Konvektionsgleichung	$\frac{d\varphi}{dt} + \frac{d\varphi}{dx}$	$-\frac{d\psi}{dt} - \frac{d\psi}{dx}$

Tabelle 3.1: Beispiele von Operatoren und ihren Adjungierten

3.2.3 Eine physikalische Interpretation

Analog zu Kapitel 3.1.2 kann die kontinuierliche Adjungierte unter Verwendung der Greenschen Funktion $G(x, x')$ physikalisch interpretiert werden:

Es ist nun $G(x, x')$ die Wirkung der Ursache $\delta(x - x')$, d.h es gilt im Gebiet Ω

$$\mathcal{L} G(x, x') = \delta(x - x') \quad (3.22)$$

und

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \int_{\Omega} G(x, x') b(x') dx' &= \int_{\Omega} \mathcal{L} G(x, x') b(x') dx' \\ &= \int_{\Omega} \delta(x - x') b(x') dx' \\ &= b(x). \end{aligned} \quad (3.23)$$

Es ist also

$$\varphi(x) = \int_{\Omega} G(x, x') b(x') dx' \quad (3.24)$$

die Lösung der partiellen Differentialgleichung $\mathcal{L}\varphi = b$.
Somit gilt dann:

$$\begin{aligned}
 (h, \varphi)_\Omega &= \int_\Omega h^\top(x) \varphi(x) dx \\
 &= \int_\Omega h^\top(x) \left(\int_\Omega G(x, x') b(x') dx' \right) dx \\
 &= \int_\Omega \int_\Omega h^\top(x) G(x, x') b(x') dx dx' \\
 &= \int_\Omega \underbrace{\left(\int_\Omega h^\top(x) G(x, x') dx \right)}_{=:\psi^\top(x')} b(x') dx' = (\psi, b)_\Omega .
 \end{aligned} \tag{3.25}$$

Die kontinuierliche Adjungierte ψ hat also am Punkt x' den Wert des Zielfunktional bzgl. der zu diesem Punkt x' gehörigen Greenschen Funktion $G(x, x')$:

$$\psi^\top(x') = \int_\Omega h^\top(x) G(x, x') dx . \tag{3.26}$$

3.2.4 Die inhomogenen adjungierten Randbedingungen

Gegeben seien nun das primale Problem

- (P) Bestimme $I = (h, \varphi)_\Omega + (d, \mathcal{C}\varphi)_{\partial\Omega}$,
wobei $\mathcal{L}\varphi = b$ in Ω
und $\mathcal{B}\varphi = c$ auf $\partial\Omega$

sowie das duale Problem

- (D) Bestimme $I^* = (\psi, b)_\Omega + (\mathcal{C}^*\psi, c)_{\partial\Omega}$,
wobei $\mathcal{L}^*\psi = h$ in Ω
und $\mathcal{B}^*\psi = d$ auf $\partial\Omega$.

\mathcal{L}^* sei dabei der duale Operator zu \mathcal{L} . Nun konstruiere die zu \mathcal{B} und \mathcal{C} dualen oder adjungierten Randoperatoren \mathcal{B}^* und \mathcal{C}^* derart, daß die Zielfunktionale I des primalen Problems (P) und I^* des dualen Problems (D) gleiche Werte liefern, d.h., so daß gilt

$$(\psi, b)_\Omega + (\mathcal{C}^*\psi, c)_{\partial\Omega} = (\psi, \mathcal{L}\varphi)_\Omega + (\mathcal{C}^*\psi, \mathcal{B}\varphi)_{\partial\Omega} \tag{3.27}$$

$$= (\mathcal{L}^*\psi, \varphi)_\Omega + (\mathcal{B}^*\psi, \mathcal{C}\varphi)_{\partial\Omega} \tag{3.28}$$

$$= (h, \varphi)_\Omega + (d, \mathcal{C}\varphi)_{\partial\Omega} \quad \forall \varphi, \psi . \tag{3.29}$$

Die Gleichungen (3.27) und (3.29) erhält man einfach aus den Substitutionen von b und c aus (P) sowie h und d aus (D). Das Gelten von Gleichung (3.28) kann folglich als Konstruktionsvorschrift für \mathcal{B}^* und \mathcal{C}^* verstanden werden. Die Frage lautet also: Wie müssen bei vorgegebenen \mathcal{B} und \mathcal{C} die Operatoren \mathcal{B}^* und \mathcal{C}^* beschaffen sein, damit

$$(\psi, \mathcal{L}\varphi)_\Omega + (\mathcal{C}^*\psi, \mathcal{B}\varphi)_{\partial\Omega} = (\mathcal{L}^*\psi, \varphi)_\Omega + (\mathcal{B}^*\psi, \mathcal{C}\varphi)_{\partial\Omega} \quad \forall \varphi, \psi \tag{3.30}$$

und folglich $I = I^*$ gilt?

Die partielle Integration von $(\psi, \mathcal{L}\varphi)_\Omega$ liefert die Identität

$$(\psi, \mathcal{L}\varphi)_\Omega = (\mathcal{L}^*\psi, \varphi)_\Omega + (\mathcal{A}_1\psi, \mathcal{A}_2\varphi)_{\partial\Omega}, \quad (3.31)$$

wobei die Operatoren \mathcal{A}_1 und \mathcal{A}_2 Differentialoperatoren auf dem Rand $\partial\Omega$ sind.

Die Gleichungen (3.30) und (3.31) führen dann zusammen zu der äquivalenten Fragestellung:

Wie müssen bei vorgegebenen \mathcal{B} und \mathcal{C} die Operatoren \mathcal{B}^* und \mathcal{C}^* beschaffen sein, damit

$$(\mathcal{A}_1\psi, \mathcal{A}_2\varphi)_{\partial\Omega} = (\mathcal{B}^*\psi, \mathcal{C}\varphi)_{\partial\Omega} - (\mathcal{C}^*\psi, \mathcal{B}\varphi)_{\partial\Omega} \quad \forall \varphi, \psi \quad (3.32)$$

und folglich $I = I^*$ gilt?

Im folgenden zeigen wir für eine große Klasse von Operatoren \mathcal{B} , \mathcal{C} , \mathcal{A}_1 und \mathcal{A}_2 die Existenz und Eindeutigkeit solcher Operatoren \mathcal{B}^* und \mathcal{C}^* :

Satz 3.2.1 *Seien \mathcal{B} , \mathcal{C} , \mathcal{A}_1 und \mathcal{A}_2 Randoperatoren, die nur auf den Werten von φ und ψ sowie deren Normalenableitungen fungieren, so daß*

$$\mathcal{B}\varphi \equiv B\Phi \quad (3.33)$$

$$\mathcal{C}\varphi \equiv C\Phi \quad (3.34)$$

$$(\mathcal{A}_1\psi, \mathcal{A}_2\varphi) \equiv \Psi^\top A\Phi, \quad (3.35)$$

wobei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{k \times n}$, $C \in \mathbb{R}^{l \times n}$, $k + l = m \leq n$ und sich die Komponenten von $\Phi \in \mathbb{R}^n$, $\Psi \in \mathbb{R}^n$ aus denen von φ , ψ und derer Normalenableitungen passenden Grades

zusammensetzen. Gilt ferner $m = \text{rang}(A) = \text{rang} \begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix} = \text{rang} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$, so existieren im

Wesentlichen eindeutige Operatoren \mathcal{B}^* und \mathcal{C}^* , so daß die Funktionale I aus (P) und I^* aus (D) gleiche Werte liefern. \square

Beweis:

Es seien die Voraussetzungen zu Satz 3.2.1 erfüllt. Gleichung (3.32) lautet dann

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} \Psi^\top A\Phi - (B^*\Psi)^\top C\Phi + (C^*\Psi)^\top B\Phi \, dS &= 0 \quad \forall \Phi, \Psi \in \mathbb{R}^n \\ \Leftrightarrow \int_{\partial\Omega} \Psi^\top [A - (B^*)^\top C + (C^*)^\top B] \Phi \, dS &= 0 \quad \forall \Phi, \Psi \in \mathbb{R}^n \\ \Leftrightarrow (B^*)^\top C - (C^*)^\top B &= A. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Es müssen also $B^* \in \mathbb{R}^{l \times n}$ und $C^* \in \mathbb{R}^{k \times n}$ sein. Definiert man weiter

$$T := \begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix} \in R^{m \times n}, \quad T^* := \begin{pmatrix} -C^* \\ B^* \end{pmatrix} \in R^{m \times n}, \quad (3.37)$$

so ist

$$T^{*\top} = \begin{pmatrix} -C^{*\top} & B^{*\top} \end{pmatrix} \in R^{n \times m} \quad (3.38)$$

und

$$A = T^{*\top} T. \quad (3.39)$$

Ist A nichtsingulär so existiert T^{-1} und es gilt

$$T^* = (T^{-1})^\top A^\top. \quad (3.40)$$

Zusammen mit Definition (3.37) von T^* sind dann die Matrizen B^* und C^* eindeutig bestimmt (und existieren). Das ist gerade der Beweis für den Fall $m = n$.

Sei nun $\text{rang}(A) = m < n$:

Nach dem Satz über die Singulärwertzerlegung (siehe hierzu [GL89]) existieren dann orthogonale Matrizen $U, V \in \mathbb{R}^{n \times n}$, so daß gilt

$$U^\top A V = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_m, 0, \dots, 0); \quad \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_m > 0. \quad (3.41)$$

Sei dann weiter $U' \in \mathbb{R}^{n \times m}$ die Matrix, die sich aus den ersten m Spalten von U zusammensetzt, und $V'^\top \in \mathbb{R}^{m \times n}$ die Matrix, die sich aus den ersten m Zeilen von V^\top zusammensetzt. Ferner seien

$$\text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_m) =: A' \in \mathbb{R}^{m \times m}, \quad U'^\top \Psi =: \Psi' \in \mathbb{R}^m, \quad V'^\top \Phi =: \Phi' \in \mathbb{R}^m. \quad (3.42)$$

Dann gilt

$$A = U' A' V'^\top, \quad \Psi^\top A \Phi = \Psi'^\top A' \Phi'. \quad (3.43)$$

Da $\text{rang}(A) = \text{rang} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = m$ ist, existiert eine Matrix $X \in \mathbb{R}^{k \times n}$, so daß

$$B = X A \quad (3.44)$$

gilt. Dann gilt ferner

$$B = X U' A' V'^\top \quad (3.45)$$

und mit

$$X U' A' =: B' \in \mathbb{R}^{k \times m} \quad (3.46)$$

gilt schließlich

$$B \Phi = B' \Phi'. \quad (3.47)$$

Verfährt man genauso mit C , so existiert auch eine Matrix $C' \in \mathbb{R}^{l \times m}$, so daß gilt

$$C \Phi = C' \Phi'. \quad (3.48)$$

Desweiteren hat man damit

$$\begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B' \\ C' \end{pmatrix} V'^\top, \quad \begin{pmatrix} B' \\ C' \end{pmatrix} =: T' \in \mathbb{R}^{m \times m}. \quad (3.49)$$

Angenommen $\text{rang}(T') < m$, dann gibt es eine Zeile von T' , die sich aus den übrigen Zeilen von T' linear kombinieren läßt und es muß auch $\text{rang}(T) < m$ im Widerspruch zur Voraussetzung $\text{rang}(T) = m$ gelten. Folglich muß dann $\text{rang}(T') = m$ sein und es existiert somit auch T'^{-1} .

Da auch

$$A'^{-1} = \text{diag} \left(\frac{1}{\sigma_1}, \dots, \frac{1}{\sigma_m} \right) \quad (3.50)$$

existiert, kann man, wie oben für den Fall $m = n$, über

$$T'^* = (T'^{-1})^\top A'^\top \quad (3.51)$$

die Matrizen B'^* und C'^* eindeutig bestimmen. ■

Den nachfolgenden Satz findet man als Behauptung bereits in [Gil97]. Der Beweis zu Satz 3.2.2 basiert auf persönlichen Aufzeichnungen von M. Giles, die dieser dem Autor freundlicherweise zur Verfügung gestellt hat [Gil02].

Satz 3.2.2 *Zunächst seien die Voraussetzungen zu Satz 3.2.1 erfüllt. Ferner sei das primale Problem (P) wohlgestellt im Hadamardschen Sinne, d.h. es gibt eine eindeutige Lösung φ für alle b, c und es existiert eine Konstante $K > 0$, unabhängig von b, c, h und d , so daß*

$$|I| < K(\|b\|_{L^2(\Omega)} + \|c\|_{L^2(\partial\Omega)})(\|h\|_{L^2(\Omega)} + \|d\|_{L^2(\partial\Omega)}) \quad (3.52)$$

gilt. Dann ist das nach Satz 3.2.1 konstruierte duale Problem (D) ebenso im Hadamardschen Sinne wohlgestellt. □

Beweis:

Für das wohlgestellte primale Problem

- (P) Bestimme $I = (h, \varphi)_\Omega + (d, \mathcal{C}\varphi)_{\partial\Omega}$,
wobei $\mathcal{L}\varphi = b = \delta(x - x')$ in Ω
und $\mathcal{B}\varphi = c = 0$ auf $\partial\Omega$

existiert die eindeutige Lösung $G(x, x')$. Dann ist ferner mit

$$\varphi(x) = (1, G(x, x')b(x'))'_\Omega \quad (3.53)$$

die Lösung zu (P) für beliebige b und $c = 0$ gegeben, wie schon in (3.23) gesehen. Das gestrichene Skalarprodukt $(\cdot)'_\Omega$ zeigt dabei an, daß nach x' integriert wird. Zeige nun, daß mit

$$\psi^\top(x') := (h(x), G(x, x'))_\Omega + (d(x), \mathcal{C}G(x, x'))_{\partial\Omega} \quad (3.54)$$

eine Lösung ψ des dualen Problems

- (D) Bestimme $I^* = (\psi, b)_\Omega + \underbrace{(\mathcal{C}^*\psi, c)_{\partial\Omega}}_{=0, \text{ da oben } c=0}$,

- wobei $\mathcal{L}^*\psi = h$ in Ω
und $\mathcal{B}^*\psi = d$ auf $\partial\Omega$

gegeben ist:

Es gilt mit ψ aus (3.54) wie gewünscht

$$\begin{aligned}
 I^* &= (\psi(x'), b(x'))'_\Omega \\
 &= (1, \psi^\top(x')b(x'))'_\Omega \\
 &\stackrel{(3.54)}{=} (1, (h(x), G(x, x'))_\Omega b(x'))'_\Omega + (1, (d(x), \mathcal{C}G(x, x'))_{\partial\Omega} b(x'))'_\Omega \\
 &\stackrel{(3.53)}{=} (h, \varphi)_\Omega + (d, \mathcal{C}\varphi)_{\partial\Omega} = I .
 \end{aligned} \tag{3.55}$$

Ferner wurden die Operatoren $\mathcal{L}^*, \mathcal{B}^*, \mathcal{C}^*$ derart konstruiert, daß (3.30) erfüllt ist, d.h.

$$(\psi, \mathcal{L}\varphi)_\Omega + (\mathcal{C}^*\psi, \mathcal{B}\varphi)_{\partial\Omega} = (\mathcal{L}^*\psi, \varphi)_\Omega + (\mathcal{B}^*\psi, \mathcal{C}\varphi)_{\partial\Omega} \quad \forall \varphi, \psi .$$

Zusammen mit $\mathcal{L}\varphi = b$, $\mathcal{B}\varphi = 0$, ψ wie oben bestimmt und (3.55) erhalten wir

$$\begin{aligned}
 (\psi, b)_\Omega &= (\mathcal{L}^*\psi, \varphi)_\Omega + (\mathcal{B}^*\psi, \mathcal{C}\varphi)_{\partial\Omega} \\
 &= (h, \varphi)_\Omega + (d, \mathcal{C}\varphi)_{\partial\Omega} .
 \end{aligned} \tag{3.56}$$

Insgesamt gilt dann

$$(\mathcal{L}^*\psi - h, \varphi)_\Omega + (\mathcal{B}^*\psi - d, \mathcal{C}\varphi)_{\partial\Omega} = 0 \tag{3.57}$$

für beliebige b .

Angenommen es gibt einen Punkt $y \in \Omega$, so daß $(\mathcal{L}^*\psi - h)(y) \neq 0$, so wähle $\epsilon > 0$ derart, daß

$$K_\epsilon(y) := \{x \in \Omega : \|x - y\|_2 < \epsilon\} \tag{3.58}$$

strikt innerhalb von Ω liegt. Ferner konstruiere man dann eine skalare Funktion α , mit

$$\alpha(x) = \begin{cases} > 0, & x \in K_\epsilon(y) \\ 0, & x \in \Omega \setminus K_\epsilon(y) . \end{cases} \tag{3.59}$$

Schließlich wähle man nun b derart, daß

$$\varphi = \alpha(\mathcal{L}^*\psi - h) \tag{3.60}$$

ist. Dann erhalten wir

$$(\mathcal{L}^*\psi - h, \varphi)_\Omega = \alpha \|\mathcal{L}^*\psi - h\|_{L^2(\Omega)}^2 > 0 \tag{3.61}$$

im Widerspruch zu (3.57). Somit muß

$$\mathcal{L}^*\psi - h \equiv 0 \tag{3.62}$$

gelten.

Angenommen es gibt einen Punkt $y \in \partial\Omega$, so daß $(\mathcal{B}^*\psi - d)(y) \neq 0$, so wähle $\epsilon > 0$ derart, daß

$$K_\epsilon(y) := \{x \in \partial\Omega : \|x - y\|_2 < \epsilon\} . \tag{3.63}$$

Ferner konstruiere man dann eine skalare Funktion β , mit

$$\beta(x) = \begin{cases} > 0, & x \in K_\epsilon(y) \\ 0, & x \in \partial\Omega \setminus K_\epsilon(y) . \end{cases} \quad (3.64)$$

Da die Zeilen der Darstellungsmatrizen B und C der primalen Randoperatoren \mathcal{B} und \mathcal{C} linear unabhängig sind, kann für ein spezielles b eine Lösung φ von $\mathcal{L}\varphi = b$ gefunden werden, die den Randbedingungen

$$\mathcal{B}\varphi = 0, \quad \mathcal{C}\varphi = \beta(\mathcal{B}^*\psi - d) \quad (3.65)$$

genügt. Dann erhalten wir

$$(\mathcal{B}^*\psi - d, \mathcal{C}\varphi)_{\partial\Omega} = \beta \|\mathcal{B}^*\psi - d\|_{L^2(\partial\Omega)}^2 > 0 \quad (3.66)$$

im Widerspruch zu (3.57). Somit muß

$$\mathcal{B}^*\psi - d \equiv 0 \quad (3.67)$$

gelten.

Somit ist die Existenz einer Lösung zum dualen Problem (D) bewiesen. Wir zeigen nun die Eindeutigkeit dieser Lösung:

Es seien ψ_1 und ψ_2 zwei Lösungen des dualen Problems (D). Dann erfüllt

$$\Delta\psi := \psi_1 - \psi_2 \quad (3.68)$$

das homogene duale Problem (D) (d.h. $h = d = 0$) und das bedeutet für (3.30), daß gilt

$$(\Delta\psi, b)_\Omega + (\mathcal{C}^*\Delta\psi, c)_{\partial\Omega} = 0 \quad \forall b, c . \quad (3.69)$$

Für $c = 0$ gilt also

$$(\Delta\psi, b)_\Omega = 0 \quad \forall b \quad (3.70)$$

und somit muß gelten

$$\Delta\psi \equiv 0 . \quad (3.71)$$

Die Beschränktheit der dualen Lösung im Hadamardschen Sinne (3.52) folgt letztlich sofort aus der Gleichheit der Funktionale I und I^* und der Symmetrie der Definition der Beschränktheit im Hadamardschen Sinne. ■

3.2.5 Beispiele

Als ein Beispiel zur Konstruktion des adjungierten Operators und der adjungierten inhomogenen Randbedingungen betrachte man hier die skalare 2D Konvektions-Diffusionsgleichung

$$\mathcal{L}\varphi \equiv \nabla \cdot (\varphi \vec{v}) - \nabla^2 \varphi = b . \quad (3.72)$$

Dabei beschreibt $\vec{v} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ die Konvektionsgeschwindigkeit. Partielle Integration liefert

$$\begin{aligned} (\psi, \mathcal{L}\varphi)_\Omega &= \int_\Omega \psi (\nabla \cdot (\varphi \vec{v}) - \nabla^2 \varphi) dV \\ &= \int_\Omega \varphi (-\vec{v} \cdot \nabla \psi - \nabla^2 \psi) dV + \int_{\partial\Omega} \psi \left(\varphi v_n - \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) + \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} dS \\ &= (\mathcal{L}^* \psi, \varphi)_\Omega + (\mathcal{A}_1 \psi, \mathcal{A}_2 \varphi)_{\partial\Omega}, \end{aligned} \quad (3.73)$$

wobei $v_n \equiv \vec{v} \cdot \vec{n}$, $\frac{\partial}{\partial n} \equiv \vec{n} \cdot \nabla$ und \vec{n} der nach außen gerichtete Rand-Einheitsnormalenvektor auf $\partial\Omega$ ist.

Somit ist die adjungierte skalare 2D Konvektions–Diffusionsgleichung gegeben mit

$$\mathcal{L}^* \psi \equiv -\vec{v} \cdot \nabla \psi - \nabla^2 \psi = h. \quad (3.74)$$

Man sieht leicht, daß

$$(\mathcal{A}_1 \psi, \mathcal{A}_2 \varphi)_{\partial\Omega} = \int_{\partial\Omega} \Psi^\top A \Phi dS, \quad (3.75)$$

mit

$$\Phi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \frac{\partial \varphi}{\partial n} \end{pmatrix}, \quad \Psi = \begin{pmatrix} \psi \\ \frac{\partial \psi}{\partial n} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} v_n & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.76)$$

1. Beispiel: Dirichlet Rand $\mathcal{B}\varphi \equiv \varphi$, $\mathcal{C}\varphi \equiv \frac{\partial \varphi}{\partial n}$.

Wir gehen nun vor wie im Beweis zu Satz 3.2.1. In diesem Fall ist dann

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T := \begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.77)$$

und es folgt

$$T^* := \begin{pmatrix} -C^* \\ B^* \end{pmatrix} = (T^{-1})^\top A^\top = \begin{pmatrix} v_n & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B^* = \begin{pmatrix} -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C^* = \begin{pmatrix} -v_n & -1 \end{pmatrix}. \quad (3.78)$$

und schließlich

$$\mathcal{B}^* \psi \equiv B^* \Psi = -\psi, \quad \mathcal{C}^* \psi \equiv C^* \Psi = -v_n \psi - \frac{\partial \psi}{\partial n}. \quad (3.79)$$

2. Beispiel: Neumann Rand $\mathcal{B}\varphi \equiv \frac{\partial \varphi}{\partial n}$, $\mathcal{C}\varphi \equiv \varphi$.

In diesem Fall ist dann

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T := \begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.80)$$

und es folgt

$$T^* := \begin{pmatrix} -C^* \\ B^* \end{pmatrix} = (T^{-1})^\top A^\top = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ v_n & 1 \end{pmatrix}, \quad B^* = \begin{pmatrix} v_n & 1 \end{pmatrix}, \quad C^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.81)$$

und schließlich

$$\mathcal{B}^* \psi \equiv B^* \Psi = v_n \psi + \frac{\partial \psi}{\partial n}, \quad \mathcal{C}^* \psi \equiv C^* \Psi = \psi. \quad (3.82)$$

4 Aerodynamische Formoptimierung

4.1 Die Euler-Gleichungen

Für den Fall kompressibler reibungsloser Strömungen wird die Strömung durch die Euler-Gleichungen beschrieben.

In kartesischen Koordinaten x, y lauten die Euler-Gleichungen in zwei Raumdimensionen:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} = 0 \quad (4.1)$$

im Strömungsgebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ mit

$$w(t, x, y) = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho E \end{pmatrix}, f(t, x, y) = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho u H \end{pmatrix}, g(t, x, y) = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho vu \\ \rho v^2 + p \\ \rho v H \end{pmatrix}. \quad (4.2)$$

Dabei ist ρ die Dichte, u, v sind die Geschwindigkeitskomponenten der Strömung, E die innere Energie und H die Enthalpie. Für ein perfektes Gas gilt für den Druck

$$p = (\gamma - 1)\rho\left(E - \frac{1}{2}(u^2 + v^2)\right) \quad (4.3)$$

und

$$\rho H = \rho E + p. \quad (4.4)$$

Dabei ist γ der Isentropenexponent.

Die erste Gleichung beschreibt die Massenerhaltung, die zweite sowie dritte Gleichung beschreiben die Erhaltung der Impulse ρu sowie ρv und die letzte Gleichung die Energieerhaltung. Die Euler-Gleichungen in der Form (4.1) heißen deshalb auch die Euler-Gleichungen in der konservativen Form und w der Vektor der konservativen Variablen. Die Vektoren f und g werden die Flußdichtevektoren genannt.

Der nachfolgende Satz und sein Beweis sind hinreichend bekannt. Die in dem Beweis verwendeten Beziehungen werden aber aus technischen Gründen später des öfteren benötigt und deshalb hier in aller Ausführlichkeit behandelt.

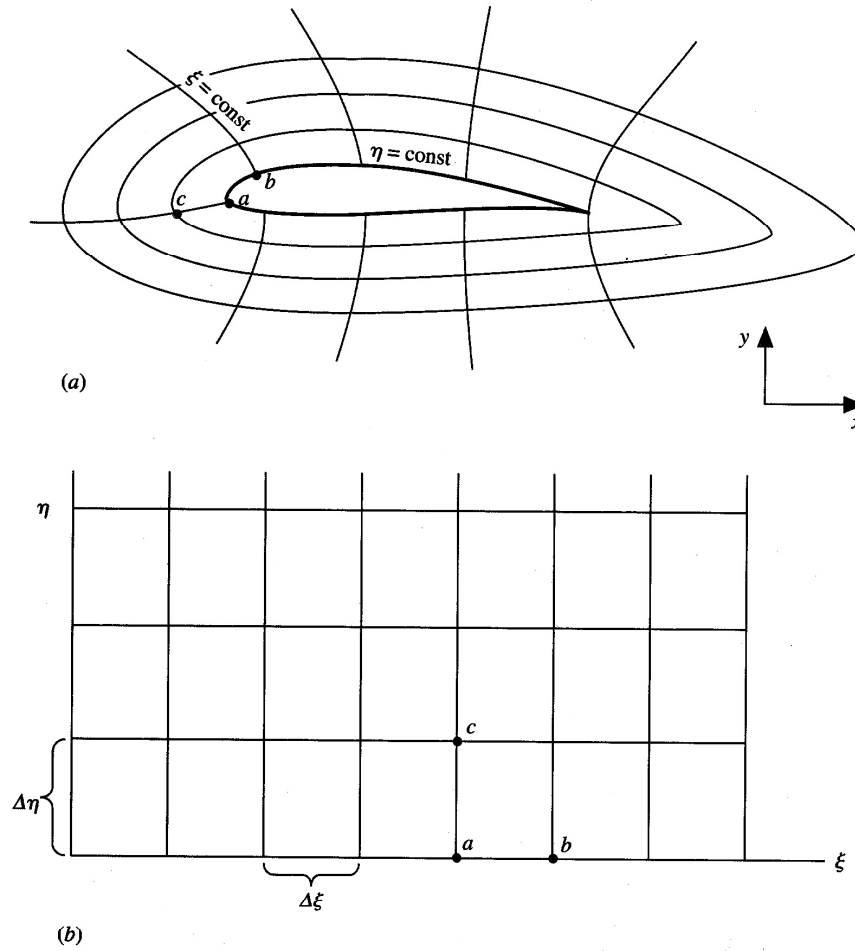


Abbildung 4.1: Körperangepaßte Koordinaten

Satz 4.1.1 Die Transformation der Euler-Gleichungen (4.1) auf körperangepaßte Koordinaten $\xi(x, y), \eta(x, y)$ ergibt:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial \xi} + \frac{\partial G}{\partial \eta} = 0 \quad (4.5)$$

im Strömungsgebiet Ω mit

$$W = J \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho E \end{pmatrix}, F = J \begin{pmatrix} \rho U \\ \rho U u + \frac{\partial \xi}{\partial x} p \\ \rho U v + \frac{\partial \xi}{\partial y} p \\ \rho U H \end{pmatrix}, G = J \begin{pmatrix} \rho V \\ \rho V u + \frac{\partial \eta}{\partial x} p \\ \rho V v + \frac{\partial \eta}{\partial y} p \\ \rho V H \end{pmatrix}. \quad (4.6)$$

Dabei ist

$$J = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

Die Euler-Gleichungen sind der Form nach also transformationsinvariant. \square

Beweis: Seien die Bezeichnungen wie im obigen Satz.

Im folgenden wird die Transformation $\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \frac{1}{J} \begin{pmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial x}{\partial \eta} \\ -\frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ betrachtet.

Es ist $d\xi = \frac{\partial \xi}{\partial x}dx + \frac{\partial \xi}{\partial y}dy$ und $d\eta = \frac{\partial \eta}{\partial x}dx + \frac{\partial \eta}{\partial y}dy$, so daß $\begin{pmatrix} d\xi \\ d\eta \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{pmatrix}}_{=K^{-1}} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$

gilt. Ebenso sieht man, daß $\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{pmatrix}}_{=K} \begin{pmatrix} d\xi \\ d\eta \end{pmatrix}$, was

$$(*) \quad K^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{J} \begin{pmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial x}{\partial \eta} \\ -\frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{pmatrix} \text{ zur Folge hat.}$$

1. Zeige: $\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial \xi} + \frac{\partial G}{\partial \eta} = 0$ in Koordinaten $\xi(x, y), \eta(x, y)$.

Euler-Gleichungen in Koordinaten $x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)$:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = 0$$

$$\rightarrow \quad (*)_2 \quad \underbrace{J \frac{\partial w}{\partial t}}_{=: \frac{\partial W}{\partial t}} + J \frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + J \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} + J \frac{\partial g}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + J \frac{\partial g}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = 0.$$

Es ist

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(J f \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) = J \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial \xi} + f \frac{\partial}{\partial \xi} \left(J \frac{\partial \xi}{\partial x} \right).$$

Somit erhält man

$$J \frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(J f \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) - f \frac{\partial}{\partial \xi} \left(J \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)$$

und genauso auch

$$J \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \eta} \left(J f \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) - f \frac{\partial}{\partial \eta} \left(J \frac{\partial \eta}{\partial x} \right).$$

Ebenso verfähre mit g und setze ein in $(*)_2$, so gilt

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(J f \frac{\partial \xi}{\partial x} + J g \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(J f \frac{\partial \eta}{\partial x} + J g \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) \\ &\quad - \underbrace{f \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \left(J \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(J \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \right)}_{=0} \\ &\quad - \underbrace{g \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \left(J \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(J \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) \right)}_{=0}. \end{aligned}$$

[Denn: $\frac{\partial}{\partial \xi} \left(J \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(J \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \stackrel{(*)}{=} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(-\frac{\partial y}{\partial \xi} \right) = 0.]$

Bleibt also

$$(*_3) \quad \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \xi} \underbrace{\left(J f \frac{\partial \xi}{\partial x} + J g \frac{\partial \xi}{\partial y} \right)}_{=:F} + \frac{\partial}{\partial \eta} \underbrace{\left(J f \frac{\partial \eta}{\partial x} + J g \frac{\partial \eta}{\partial y} \right)}_{=:G} = 0.$$

2. Zeige bzw. verifiziere: $F = J \begin{pmatrix} \rho U \\ \rho U u + \frac{\partial \xi}{\partial x} p \\ \rho U v + \frac{\partial \xi}{\partial y} p \\ \rho U H \end{pmatrix}, G = J \begin{pmatrix} \rho V \\ \rho V u + \frac{\partial \eta}{\partial x} p \\ \rho V v + \frac{\partial \eta}{\partial y} p \\ \rho V H \end{pmatrix}.$

Verifiziere komponentenweise:

$$\begin{aligned} F_1 &= \left(J f \frac{\partial \xi}{\partial x} + J g \frac{\partial \xi}{\partial y} \right)_1 \\ &= J \frac{\partial \xi}{\partial x} f_1 + J \frac{\partial \xi}{\partial y} g_1 \\ &= J \rho \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} u + \frac{\partial \xi}{\partial y} v \right) \\ &= J \rho U \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_2 &= J \frac{\partial \xi}{\partial x} f_2 + J \frac{\partial \xi}{\partial y} g_2 \\ &= J \rho \left(u^2 \frac{\partial \xi}{\partial x} + p \frac{\partial \xi}{\partial x} + uv \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) \\ &= J \rho \left(u \left(u \frac{\partial \xi}{\partial x} + v \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) + p \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) \\ &= J \rho \left(u U + p \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) \end{aligned}$$

usw. ■

4.2 Die aerodynamischen Beiwerte

In der Aerodynamik wird der Druck p auf der Profilwand $\partial\Omega_w$ zumeist in den dimensionslosen Druckbeiwert

$$C_p := \frac{2(p - p_\infty)}{\gamma M_\infty^2 p_\infty} \quad (4.8)$$

überführt. Die Bewertung aerodynamischer Konfigurationen wird dann vermöge der dimensionslosen aerodynamischen Beiwerte für den Widerstand, den Auftrieb und das Nickmoment vorgenommen. Das Nickmoment ist das Drehmoment, welches der Tragflügel aufgrund seiner Aerodynamik erfährt.

Bézier-Kurven als Spezialfall. Diese werden in dem Lehrbuch von J. Hoschek [HL92] ausführlich eingeführt und erklärt. Ferner kann am Institut für Aerodynamik und Strömungstechnik des DLR in Braunschweig auf einen Pool von B-Spline-Parametrisierungsroutinen (siehe [Bar96], [Wil01]) zugegriffen werden, die unter anderem auf den Darstellungen von J. Hoschek in [HL92] basieren.

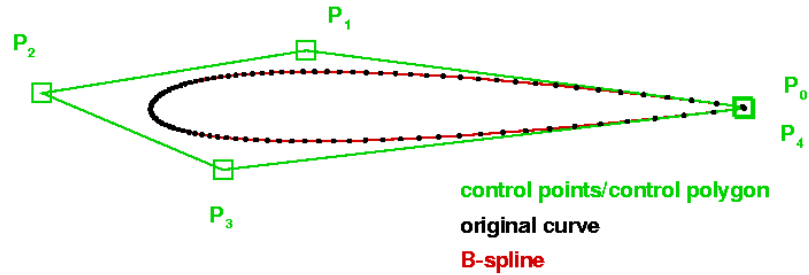


Abbildung 4.2: Geometrieparametrisierung eines NACA-Profiles, dabei ist $X = (P_0, \dots, P_4)^\top$ der Vektor der Kontrollpunkte einer B-Spline-Parametrisierung.

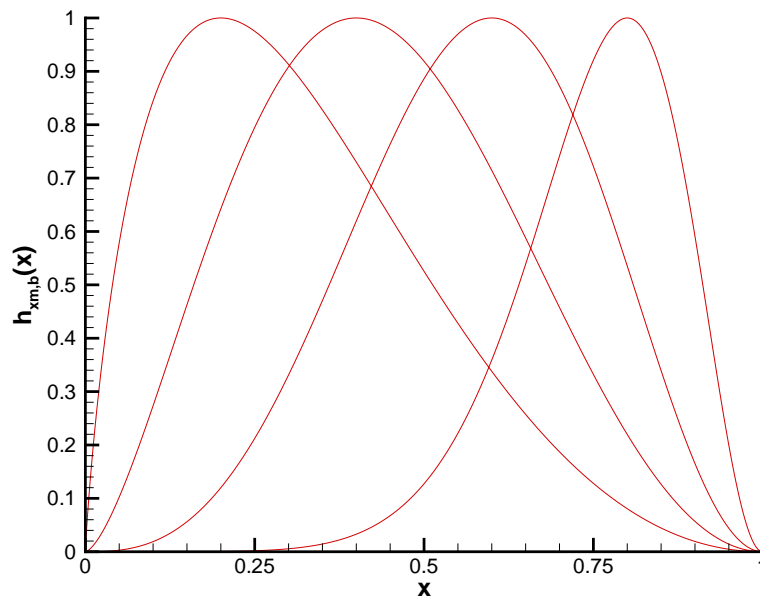


Abbildung 4.3: Die Hicks-Henne-Funktionen $h_{x_m,b}$ für $b = 2$ und $x_m \in \{0.2; 0.4; 0.6; 0.8\}$.

Die in [HH78] beschriebenen Hicks-Henne-Funktionen erfreuen sich in der aerodynamischen Formoptimierung größter Beliebtheit, da sie weniger Welligkeiten in der Approximation der Profilgeometrie erzeugen, als z.B. die B-Spline-Parametrisierungen.

Die Hicks-Henne-Funktionen sind von der Gestalt

$$h_{x_m, b} : \begin{cases} [0, 1] & \rightarrow [0, 1] \\ x & \mapsto \left(\sin\left(\pi x^{\frac{\log(0.5)}{\log(x_m)}}\right) \right)^b \end{cases}, \quad (4.13)$$

dabei ist $x_m \in]0, 1[$ die Stelle der maximalen Amplitude der "Sinus-Beule" und $b > 0$ kontrolliert die Breite dieser "Sinus-Beule".

4.3.2 Aerodynamische Formoptimierungsprobleme, Zielfunktionen und Nebenbedingungen

Seien $X = (x_i) \in \mathbb{R}^n$ der Vektor der Entwurfsvariablen (etwa der Vektor der Kontrollpunkte einer B-Spline-Parametrisierung), $w(X) \in \mathbb{R}^d$ die Zustandsvariablen und $I(X, w(X))$ die zu optimierende skalare Zielfunktion.

In der aerodynamischen Formoptimierung legen die Entwurfsvariablen z.B. die Geometrie eines Tragflügelprofils fest.

Die Zustandsvariable ist dann der Vektor der konservativen Variablen und die zu optimierende Zielfunktion I können beispielsweise der Widerstandsbeiwert, der Auftriebsbeiwert, der Nickmomentenbeiwert oder Kombinationen aus diesen sein.

Das Optimierungsproblem läßt sich stets als ein Minimierungsproblem

$$I(X, w(X)) \rightarrow \min \quad (4.14)$$

aufschreiben.

Dabei ist die Zustandsgleichung oder Kontrollgleichung $R(X, w(X)) = 0$ zu erfüllen, also die Euler- oder Navier-Stokes-Gleichungen.

Im allgemeinen sind auch noch Nebenbedingungen $C_j(X, w(X)) \leq 0$, $j = 1, 2, \dots, m$ einzuhalten, wie z.B. eine vorgegebene Mindestprofildicke als geometrische oder ein zu haltender Mindestauftrieb als aerodynamische Nebenbedingung.

Für ein Minimum bei $X = X^*$ ist $\nabla_X I(X^*, w^*) = 0$ bei Einhaltung der Kontrollgleichung $R(X^*, w^*) = 0$ notwendig.

4.3.3 Restringierte Optimierungsstrategien

In der aerodynamischen Formoptimierung ist es zumindest im Falle des Detailentwurfes mit einer hohen Anzahl an Entwurfsvariablen unpraktikabel, genetische oder Evolutionsstrategien zu verwenden, da man hier mindestens mit den Euler-Gleichungen, wenn nicht sogar mit den Navier-Stokes-Gleichungen, die Physik modellieren und kontrollieren muß, um eine physikalisch aussagekräftige Optimierung durchführen zu können. Eine einzige Nachrechnung kann hier je nach Komplexität der aerodynamischen Form oder des physikalischen Modells mehrere Stunden oder gar Tage auf einem Supercomputer in Anspruch nehmen. Leider benötigen aber gerade die genetischen oder Evolutionsstrategien immens viele Nachrechnungen.

Was sich noch im Vorentwurf als Stärke der genetischen oder Evolutionsstrategien erweist, nämlich daß sie oftmals in der Lage sind, die gewünschten globalen Optima

aufzuspüren, erweist sich im Detailentwurf als nicht notwendige Eigenschaft, da man hier gerade an einem speziellen, lokalen Optimum interessiert ist, an einer Form interessiert ist, welche die Aerodynamik zwar entscheidend verbessert aber geometrisch nicht allzu sehr von der ursprünglichen abweicht. Große Modifikationen der Form werden zumeist von vorne herein durch das Setzen geometrischer Nebenbedingungen ausgeschlossen, um so viele bereits existierende Zulieferbausteine als irgend möglich verwenden zu können. Z.B. sollte ein Fahrwerk noch in etwa an der gleichen Stelle versenkt werden können, der Flügel sein Tankvolumen nicht verlieren usw.

In der aerodynamischen Detailoptimierung sind also die hier sehr viel effizienteren deterministischen gradientenbasierten Optimierungsstrategien gefragt. Die einfachste deterministische gradientenbasierte Optimierungsstrategie ist das im folgenden zunächst für den unrestringierten Fall beschriebene Verfahren des steilsten Abstieges, oft auch nur als Gradientenverfahren bezeichnet, welches sich leicht zum konjugierten Gradientenverfahren erweitern läßt.

Bei vorgegebenem Startpunkt X im Entwurfsraum seien

$$\tilde{X} := -\frac{\nabla_X I(X, w)}{\|\nabla_X I(X, w)\|} \quad (4.15)$$

die Suchrichtung, eben in (die optimale) Richtung des steilsten Abstieges, und ϵ sei die Schrittweite.

Mit Änderung der Entwurfsvariablen X um $\epsilon\tilde{X}$ ändern sich die Zustandsgrößen $w(X)$ um $\epsilon\tilde{w}$, wobei

$$\begin{aligned} w(X + \epsilon\tilde{X}) &= w(X) + \underbrace{\frac{dw(X)}{dX}}_{=: \epsilon\tilde{w}} \epsilon\tilde{X} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\ &= w(X) + \epsilon\tilde{w}. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Entwickeln von $I(X + \epsilon\tilde{X}, w + \epsilon\tilde{w})$ in die Taylorreihe liefert

$$\begin{aligned} I(X + \epsilon\tilde{X}, w + \epsilon\tilde{w}) &= I(X, w) + \frac{\partial I(X, w)}{\partial X} \epsilon\tilde{X} + \frac{\partial I(X, w(X))}{\partial w} \frac{dw(X)}{dX} \epsilon\tilde{X} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\ &= I(X, w) + \frac{dI(X, w)}{dX} \epsilon\tilde{X} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\ &= I(X, w) + \underbrace{\nabla_X^\top I(X, w)}_{= -\epsilon\|\nabla_X I(X, w)\|} \cdot \epsilon\tilde{X} + \mathcal{O}(\epsilon^2). \end{aligned} \quad (4.17)$$

Es kann also mit einer geeigneten Schrittweite ϵ eine modifizierte Geometrie berechnet werden, die zur Verringerung der Zielfunktion führt, d.h. daß gilt

$$I(X + \epsilon\tilde{X}, w + \epsilon\tilde{w}) \leq I(X, w). \quad (4.18)$$

Durch gezieltes Variieren der Schrittweite ϵ sucht man schließlich das Minimum der Zielfunktion I in der Suchrichtung \tilde{X} . Diese Suche wird als Liniensuche bezeichnet. Ein recht übliches Verfahren zur Liniensuche ist die Methode der quadratischen Interpolation. Diese sowie andere Verfahren zur Liniensuche werden ausführlich in [NW00]

beschrieben.

Nach der erfolgreichen Liniensuche, d.h. nach Ermittlung der optimalen Schrittweite ϵ_k , setzt man $X^{(k+1)} := X^{(k)} + \epsilon_k \tilde{X}^{(k)}$, berechnet erneut den Gradienten der Zielfunktion und beginnt erneut mit der Liniensuche. Das Abbruchkriterium für dieses Verfahren ist das Verschwinden des Gradienten der Zielfunktion.

Beim konjugierten Gradientenverfahren sucht man stattdessen in Richtung der konjugierten Gradienten. Für nichtlineare Probleme hat sich insbesondere das Verfahren von Polak-Ribière bewährt, bei dem die konjugierten Gradienten wie folgt iterativ bestimmt werden:

$$\tilde{X}^{(0)} := -\nabla_{X^{(0)}} I, \quad \tilde{X}^{(k+1)} := -\nabla_{X^{(k+1)}} I + \frac{\nabla_{X^{(k+1)}}^\top I \cdot (\nabla_{X^{(k+1)}} I - \nabla_{X^{(k)}} I)}{\|\nabla_{X^{(k)}} I\|^2} \tilde{X}^{(k)}. \quad (4.19)$$

Dieses sowie weitere konjugierte Gradientenverfahren werden z.B. in [NW00] eingeführt und besprochen. Die konjugierten Gradientenverfahren konvergieren in der Regel schneller als das Verfahren steilster Abstiege.

Ein restringiertes Optimierungsproblem kann z.B. die Widerstandsreduktion bei konstantem Auftrieb und Nickmoment sein. Wir haben dann ein nichtlineares Optimierungsproblem der Gestalt

$$I(X, w) \rightarrow \min \quad (4.20)$$

unter den Nebenbedingungen

$$C_j(X, w) \equiv C_j \stackrel{!}{=} \text{konst.} \quad (j = 1, \dots, m) \quad (4.21)$$

zu lösen.

Bei der Strategie des sogenannten restringierten Sequential Linear Programming (SLP) linearisiert man die Zielfunktion sowie die Nebenbedingungen und erhält dann das jeweils in jedem Schritt (in jeder Sequenz) zu lösende lineare Optimierungsproblem der Gestalt

$$I(X + \Delta X) \approx I(X) + \nabla_X^\top I(X) \cdot \Delta X \rightarrow \min \quad (4.22)$$

unter den Nebenbedingungen

$$C_j(X + \Delta X) - C_j(X) \approx \nabla_X^\top C_j(X) \cdot \Delta X \stackrel{!}{=} 0 \quad (j = 1, \dots, m). \quad (4.23)$$

Gibt es mehr Entwurfsvariablen als Nebenbedingungen, so ist das Optimierungsproblem (4.22, 4.23) unbeschränkt, weshalb dann Limitierungen für den Suchraum gesetzt werden müssen [Van84]. Ohne Berücksichtigung der Nebenbedingungen würde man mit $\Delta X := \tilde{X}$, als optimale Suchrichtung, wieder genau das Verfahren des steilsten Abstieges bekommen.

Gleichung (4.23) zeigt gerade, daß wir zur Erfüllung der Nebenbedingungen orthogonal zu allen Gradienten der Nebenbedingungsgrößen suchen müssen. Die beste Suchrichtung, die zur Minimierung der Zielfunktion führt und dabei keine der Nebenbedingungen verletzt, ist folglich die Projektion von \tilde{X} auf den zu

$$\text{span} \{ \nabla_X^\top C_1(X), \dots, \nabla_X^\top C_m(X) \} \quad (4.24)$$

orthogonalen Unterraum. Unter der Voraussetzung, daß

$$\dim \left(\text{span} \left\{ \nabla_X^\top C_1(X), \dots, \nabla_X^\top C_m(X), \tilde{X} \right\} \right) = m + 1, \quad (4.25)$$

orthogonalisieren wir das Minimalsystem

$$\{a_1, \dots, a_m, a_{m+1}\} := \left\{ \nabla_X^\top C_1(X), \dots, \nabla_X^\top C_m(X), \tilde{X} \right\} \quad (4.26)$$

mit dem Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahren zu

$$\{b_1, \dots, b_m, b_{m+1}\}, \quad (4.27)$$

wobei

$$\begin{aligned} b_1 &:= a_1, \\ b_{l+1} &:= a_{l+1} - \sum_{j=1}^l \frac{b_j^\top a_{l+1}}{\|b_j\|^2} \quad (l = 1, \dots, m). \end{aligned} \quad (4.28)$$

Dann gilt bekanntlich

$$b_{m+1} = \tilde{X} - \sum_{j=1}^m \frac{b_j^\top \tilde{X}}{\|b_j\|^2} \perp \text{span} \{a_1, \dots, a_m\} \quad (4.29)$$

und wir wählen folglich

$$\Delta X := b_{m+1}, \quad (4.30)$$

als Liniensuchrichtung zwecks Minimierung von (4.22) unter Erfüllung von (4.23). Wir Bezeichnen diese Vorgehensweise im folgenden als das Verfahren restringierter steilster Abstiege unter Verwendung der orthogonalen Projektion. Dieses Verfahren wurde von J. Brezillon in das MEGAFLOW Optimierungssystem integriert [GB02a].

Das restringierte SLP läßt sich zum restringierten Sequential Quadratic Programming (SQP) erweitern. Man löst dann anstatt der linearen die Sequenz quadratischer Optimierungsprobleme

$$Q^{(k)}(S) = I(X^{(k)}) + \nabla_X^\top I(X^{(k)}) \cdot S + \frac{1}{2} S^\top B^{(k)} S \rightarrow \min \quad (S \in \mathbb{R}^n, B^{(k)} \in \mathbb{R}^{n \times n}), \quad (4.31)$$

z.B. unter den Nebenbedingungen

$$\nabla_X^\top C_j(X^{(k)}) \cdot S + C_j(X^{(k)}) \leq 0 \quad (j = 1, \dots, m). \quad (4.32)$$

Setzt man die Matrizen $B^{(k)}$ jeweils mit den Hessematrizen der Lagrangefunktion

$$I - \psi^\top R \quad (4.33)$$

gleich (dabei ist $\psi \in \mathbb{R}^d$ der Lagrangemultiplikator), so bekommt man ein klassisches Newtonverfahren 2. Ordnung. Das Auswerten der Hessematrizen ist jedoch in der aerodynamischen Formoptimierung, wie wir später sehen werden, viel zu aufwendig.

Setzt man jedoch z.B. im ersten Schritt für $B^{(1)}$ eine positiv definite, die Hessematrix mehr oder weniger gut approximierende Matrix (teilweise genügt es schon, die Einheitsmatrix zu setzen), und aktualisiert dann diese in den nächsten Schritten jeweils mit den nach Broydon, Fletcher, Goldfarb und Shanno benannten BFGS-Updates [NW00], so erhält man unter gewissen Voraussetzungen [BTW82] ein superlinear konvergierendes Optimierungsverfahren.

Heutzutage sind insbesondere die einfachen Gradientenverfahren bis hin zum restringierten SLP aber vereinzelt auch schon das restringierte SQP (mit BFGS-Updates) Standardwerkzeuge der Optimierung in den Ingenieursanwendungen [Van84]. Es hat sich hier bereits eine Softwareindustrie etabliert. So vertreibt z.B. die Vanderplaats Research & Development [van] das Design Optimization Tool (DOT), das neben den hier erwähnten Verfahren noch einen ganzen Strauß weiterer Verfahren beinhaltet. DOT ist mittlerweile ebenfalls Bestandteil des MEGAFLOW Optimierungssystems.

Das eigentliche Kernproblem der deterministischen aerodynamischen Formoptimierung ist also die Frage nach der effizienten Auswertung der Gradienten der Zielfunktionen sowie der Nebenbedingungen.

4.4 Berechnung der Gradienten der Zielfunktionen und Nebenbedingungen

4.4.1 Finite Differenzen

Für n Entwurfsvariablen ist der Gradient $\nabla_X I = \left(\dots, \frac{dI}{dx_k}, \dots \right)_{k=1, \dots, n}^\top$ wie folgt definiert:

$$\frac{dI}{dx_k} := \lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{I[(X + \mu E_k), w(X + \mu E_k)] - I(X, w(X))}{\mu}, \quad k = 1, \dots, n. \quad (4.34)$$

Dabei seien die E_k jeweils die k -ten Einheitsvektoren.

Beim Finite Differenzen-Verfahren wird der Gradient gerade durch obige Differenzen für hinreichend kleine μ approximiert. Dabei ist die Wahl von μ entscheidend für die Güte der Approximation (\rightarrow inexakter Gradient).

Wie man sieht, sind hierbei für die Auswertung des Gradienten n Auswertungen der Zustandsvariablen $w(X + \mu E_k)$ sowie die Auswertung von $w(X)$ erforderlich.

Der numerische Aufwand beläuft sich also auf $\mathcal{O}(n)$ Strömungsrechnungen - ist also direkt proportional zur Anzahl der Entwurfsvariablen.

Je komplexer die Geometrie oder die aufzulösenden physikalischen Phänomene in der aerodynamischen Formoptimierung sind, desto mehr Entwurfsvariablen benötigt man. Schnell übersteigt dann der numerische Aufwand des Ermitteln der Gradienten von Zielfunktion und Nebenbedingungen den Aufwand für die Liniensuche, gemessen in Aufrufen des Strömungslösers. Der Einsatz Finiter Differenzen stößt deshalb selbst bei den heutigen Hochleistungsrechnern schnell an seine Grenzen und wird unpraktikabel.

4.4.2 Duale diskrete Formulierung

Betrachtet man nun die diskretisierte Kontrollgleichung

$$R_d(w_d, x_i) = 0, \quad (4.35)$$

so gilt für jede der l Entwurfsvariablen x_i :

$$\frac{dR_d}{dx_i} = \frac{\partial R_d}{\partial w_d} \frac{dw_d}{dx_i} + \frac{\partial R_d}{\partial x_i} \quad (4.36)$$

$$=: A\varphi - b \quad (4.37)$$

$$= 0. \quad (4.38)$$

In Definition (4.37) wird in Analogie zu Kapitel 3.1.1 bezeichnet. φ muß also das lineare Gleichungssystem $A\varphi = b$ lösen.

Für die Zielfunktion I_d gilt dann

$$\frac{dI_d}{dx_i} = \frac{\partial I_d}{\partial w_d} \frac{dw_d}{dx_i} + \frac{\partial I_d}{\partial x_i} \quad (4.39)$$

$$=: h^\top \varphi + \frac{\partial I_d}{\partial x_i}. \quad (4.40)$$

(4.40) definiert also analog zu Kapitel 3.1.1 das skalare Zielfunktional

$$h^\top \varphi = \frac{dI_d}{dx_i} - \frac{\partial I_d}{\partial x_i} = \psi^\top b = -\psi^\top \frac{\partial R_d}{\partial x_i}, \quad (4.41)$$

welches ebenso mittels des Vektors der adjungierten Variablen ψ ausgewertet werden kann. Umformen von Gleichung (4.41) liefert dann

$$\frac{dI_d}{dx_i} = \frac{\partial I_d}{\partial x_i} - \psi^\top \frac{\partial R_d}{\partial x_i}. \quad (4.42)$$

Wie in Kapitel 3.1.1 beschrieben muß ψ die diskrete adjungierte Gleichung

$$A^\top \psi - h = \left(\frac{\partial R_d}{\partial w_d} \right)^\top \psi - \left(\frac{\partial I_d}{\partial w_d} \right)^\top = 0 \quad (4.43)$$

lösen. Analog zu Kapitel 3.1.1 ist hier das Fazit:

Anstatt l -maligen LöSENS von (4.37) um $\left(\frac{dw_d}{dx_i} \right)_{i=1, \dots, l}$ zu erhalten, um dann schließlich

$\nabla_X^\top I_d = \left(\frac{dI_d}{dx_i} \right)_{i=1, \dots, l}$ mittels (4.39) auswerten zu können, kann alternativ einmal die adjungierte Gleichung (4.43) gelöst werden, um den Gradienten $\nabla_X I_d$ schließlich mit (4.42) zu berechnen.

Mit dem Adjungiertenverfahren ist man hier also bzgl. des numerischen Aufwandes zur Bestimmung einer optimalen Suchrichtung, also zur Bestimmung des Gradienten $\nabla_X I_d$, unabhängig von der Anzahl der Entwurfsvariablen.

Die diskretisierte Kontrollgleichung (4.35) kann zum Beispiel die in einem Strömungslöser implementierte Diskretisierung der Euler-Gleichungen sein.

Es sei hier kurz erwähnt, daß anstelle einer Handimplementierung zur Lösung der

diskreten adjungierten Gleichung (4.43) unter Zuhilfenahme sogenannter Algorithmischer Differenzierer (im Rückwärtsmodus) nahezu automatisch ein Adjungierten-Löser erzeugt werden kann. Eine umfassende Beschreibung der Techniken des Algorithmischen Differenzierens, kurz AD, kann in dem Buch von A. Griewank [Gri00] gefunden werden.

In [GKS03] wird beispielsweise der Einsatz von AD-Tools für die automatische Erzeugung eines adjungierten Euler-Lösers gezeigt. Der hier differenzierte Euler-Löser hat 2485 Programmzeilen und der automatisch erzeugte adjungierte Euler-Löser 7472 Programmzeilen, ist also ca. drei mal so groß. Die Laufzeit des adjungierten Euler-Lösers erhöht sich gegenüber der des Euler-Lösers um den Faktor 2.4. Dieser Speicher- und Laufzeitenzuwachs ist typisch für viele AD-Tools. Die Bewältigung dieses Problems ist Gegenstand der derzeitigen Forschung in der AD-Community (siehe z.B. [GW00, GM02]).

Die in der Luftfahrtindustrie verwendeten CFD-Löser haben jedoch zumeist mehrere hunderttausend Programmierzeilen und die Rechenzeiten für die komplexen aerodynamischen Anwendungsfälle sind sehr hoch. Allerdings wird trotz der oben beschriebenen Probleme bereits der Einsatz von AD-Tools für große CFD-Codes erprobt. So wurde z.B. der kommerzielle Code FLUENT [flu] algorithmisch differenziert [BBLR01]. FLUENT konnte hier allerdings nur im Vorwärtsmodus, also nicht im Adjungierten-Modus differenziert werden. So wird zwar die exakte Gradienteninformation erhalten, der numerische Aufwand ist hier jedoch proportional zur Anzahl der Entwurfsvariablen.

4.4.3 Lagrangesche kontinuierliche Formulierung

Für die Taylorentwicklung der Kontrollgleichung gilt

$$\begin{aligned} R(X + \epsilon \tilde{X}, w + \epsilon \tilde{w}) &= R(X, w) + \frac{\partial R(X, w)}{\partial X} \epsilon \tilde{X} + \frac{\partial R(X, w(X))}{\partial w} \frac{dw(X)}{dX} \epsilon \tilde{X} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\ &\stackrel{(4.16)}{=} \underbrace{R(X, w)}_{\stackrel{!}{=} 0} + \frac{\partial R}{\partial X} \epsilon \tilde{X} + \frac{\partial R}{\partial w} \epsilon \tilde{w} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \stackrel{!}{=} 0. \end{aligned} \quad (4.44)$$

Es muß also

$$\frac{\partial R}{\partial X} \epsilon \tilde{X} + \frac{\partial R}{\partial w} \epsilon \tilde{w} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \stackrel{!}{=} 0 \quad (4.45)$$

gelten. Weiter gilt

$$\begin{aligned} \nabla_X^\top I \cdot \epsilon \tilde{X} &= \left(\frac{\partial I}{\partial X} + \frac{\partial I}{\partial w} \frac{dw}{dX} \right) \epsilon \tilde{X} \\ &\stackrel{(4.16)}{=} \frac{\partial I}{\partial X} \epsilon \tilde{X} + \frac{\partial I}{\partial w} \epsilon \tilde{w}. \end{aligned} \quad (4.46)$$

(4.45) und (4.46) liefern demnach

$$\nabla_X^\top I \cdot \epsilon \tilde{X} = \frac{\partial I}{\partial X} \epsilon \tilde{X} + \frac{\partial I}{\partial w} \epsilon \tilde{w} - \psi^\top \left(\frac{\partial R}{\partial X} \epsilon \tilde{X} + \frac{\partial R}{\partial w} \epsilon \tilde{w} \right), \quad (4.47)$$

für jeden Lagrangemultiplikator $\psi \in \mathbb{R}^d$.

Berechnet man den Gradienten der Zielfunktion $\nabla_X I$ mittels Finiten Differenzen, so sind es gerade diese \tilde{w} -Terme in Gleichung (4.46) oder (4.47), die bei n Entwurfsvariablen $n + 1$ Strömungsberechnungen erzwingen - sie beschreiben gerade die Änderung der Strömungsphysik nach Änderung der Profilgeometrie.

Durch geschicktes Umformen und zusätzliche Bedingungen an ψ kann man nun erreichen, daß der numerisch aufwendig zu bestimmende Faktor \tilde{w} herausfällt:

$$\nabla_X^\top I \cdot \epsilon \tilde{X} = \left(\frac{\partial I}{\partial X} - \psi^\top \frac{\partial R}{\partial X} \right) \epsilon \tilde{X} + \underbrace{\left(\frac{\partial I}{\partial w} - \psi^\top \frac{\partial R}{\partial w} \right)}_{\stackrel{!}{=} 0} \epsilon \tilde{w}. \quad (4.48)$$

Die Forderung

$$\frac{\partial I}{\partial w} - \psi^\top \frac{\partial R}{\partial w} \stackrel{!}{=} 0 \quad (4.49)$$

ist dann die in ψ lineare adjungierte Gleichung, deren Lösung ψ der Vektor der adjungierten Variablen ist. Für diesen speziellen Lagrangemultiplikator ψ verschwinden dann gerade die \tilde{w} -Terme in Gleichung (4.48) und der Gradient läßt sich schließlich aus

$$\nabla_X^\top I = \frac{\partial I}{\partial X} - \psi^\top \frac{\partial R}{\partial X} \quad (4.50)$$

berechnen.

Der numerische Aufwand beläuft sich hier also auf nur eine Strömungs- und eine adjungierte Strömungsberechnung, ist also unabhängig von der Anzahl der Entwurfsvariablen.

Als ein weiterer Vorteil erweist sich, daß man hier den exakten Gradienten erhält und nicht, wie im Falle der Finiten Differenzen, eine Approximation.

Mittels Lagrangescher Formulierung kommt man also zur gleichen adjungierten Formulierung. Hierzu vergleiche man (4.49) mit (4.43) und (4.50) mit (4.42).

Der duale Ansatz liefert also eine Reduktion des numerischen Aufwandes und der Lagrangesche Ansatz, der die Reduktion des numerischen Aufwandes fordert, führt zum dualen oder adjungierten System.

4.4.4 Formulierung der kontinuierlichen adjungierten Euler-Gleichungen und Randbedingungen

Im folgenden werden nun die kontinuierlichen adjungierten Euler-Gleichungen und deren Randbedingungen zunächst für den Fall der Optimierungsaufgabe der Widerstandsminimierung hergeleitet.

Die Zielfunktion I ist also der zu minimierende Widerstandsbeiwert C_D , der sich wie folgt berechnen läßt

$$C_D = \frac{1}{C_{\text{ref}}} \int_{\partial\Omega_w} C_p (n_x \cos \alpha + n_y \sin \alpha) dS. \quad (4.51)$$

Die Änderung des Vektors der Entwurfsvariablen X um die Variation δX zu $X + \delta X$ führt zur Änderung der Profilgeometrie von $\partial\Omega_w(X)$ zu $\partial\Omega_w(X + \delta X)$.

Im stationären Fall gilt für die Ausgangsgeometrie $\partial\Omega_w(X)$ in körperangepaßten Koordinaten

$$\frac{\partial F}{\partial \xi} + \frac{\partial G}{\partial \eta} = 0 \quad (4.52)$$

sowie für die gestörte Geometrie $\partial\Omega_w(X + \delta X)$

$$\frac{\partial(F + \delta F)}{\partial \xi} + \frac{\partial(G + \delta G)}{\partial \eta} = 0. \quad (4.53)$$

Folglich muß

$$\frac{\partial}{\partial \xi}(\delta F) + \frac{\partial}{\partial \eta}(\delta G) = 0 \quad (4.54)$$

gelten. Dabei lassen sich die Variationen δF und δG wie folgt berechnen:

Satz 4.4.1

$$\delta F = \delta \left(J \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) f + \delta \left(J \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) g + J \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial w} \delta w + J \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial w} \delta w \quad (4.55)$$

und

$$\delta G = \delta \left(J \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) f + \delta \left(J \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) g + J \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial w} \delta w + J \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial w} \delta w. \quad (4.56)$$

□

Beweis:

$$\begin{aligned} \delta F &= {}_1 \delta \left(J f \frac{\partial \xi}{\partial x} + J g \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) \\ &= \delta \left(J f \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) + \delta \left(J g \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) \\ &= \delta \left(J \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) f + \delta \left(J \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) g + J \frac{\partial \xi}{\partial x} \underbrace{\delta f}_{= \frac{\partial f}{\partial w} \delta w} + J \frac{\partial \xi}{\partial y} \underbrace{\delta g}_{= \frac{\partial g}{\partial w} \delta w} \end{aligned}$$

₁ siehe (*₃) aus dem Beweis zu Satz 4.1.1

Analog verfahren für δG . ■

Mit Gleichung (4.54) und dem Fundamentallemma der Variationsrechnung folgt

$$\int_{\Omega} \psi^{\top} \left(\frac{\partial}{\partial \xi}(\delta F) + \frac{\partial}{\partial \eta}(\delta G) \right) dV = 0 \quad (4.57)$$

für alle beliebigen Lagrangemultiplikatoren ψ . Ist dabei ψ differenzierbar, so folgt mit der Greenschen Formel

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega} \psi^{\top} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} (\delta F) + \frac{\partial}{\partial \eta} (\delta G) \right) dV \\ &= - \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \psi^{\top}}{\partial \xi} \delta F + \frac{\partial \psi^{\top}}{\partial \eta} \delta G \right) dV \\ &\quad + \int_{\partial \Omega_f} (n_1 \psi^{\top} \delta F + n_2 \psi^{\top} \delta G) dS + \int_{\partial \Omega_w} (n_1 \psi^{\top} \delta F + n_2 \psi^{\top} \delta G) dS, \end{aligned} \quad (4.58)$$

wobei $\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix}$ der Normaleneinheitsvektor senkrecht zum Rand $\partial \Omega = \partial \Omega_f \cup \partial \Omega_w$ in körperangepaßten Koordinaten sei.

(Definitionen nach Tabelle 4.1)

Die Variation der Profilgeometrie von $\partial \Omega_w(X)$ zu $\partial \Omega_w(X + \delta X)$ verursacht neben der Variation der Normalenvektoren der Profilwand eine Variation in der Strömungslösung (wie oben gesehen), die ihrerseits wiederum eine Druckvariation δp verursacht. Somit erhält man die Variation des dimensionslosen Druckbeiwertes mit

$$\delta C_p = \frac{2\delta p}{\gamma M_{\infty}^2 p_{\infty}} \quad (4.59)$$

und es ergibt sich die Variationen des Widerstandsbeiwertes zu

$$\begin{aligned} \delta C_D &= \frac{1}{C_{\text{ref}}} \int_{\partial \Omega_w} C_p (\delta n_x \cos \alpha + \delta n_y \sin \alpha) dS \\ &\quad + \frac{2}{\gamma M_{\infty}^2 p_{\infty} C_{\text{ref}}} \int_{\partial \Omega_w} \delta p (n_x \cos \alpha + n_y \sin \alpha) dS. \end{aligned} \quad (4.60)$$

Ergänzen wir nun Gleichung (4.60) für die Variation der Zielfunktion δC_D um den Nullterm (4.58), so gilt

$$\begin{aligned} \delta C_D &= \frac{2}{\gamma M_{\infty}^2 p_{\infty} C_{\text{ref}}} \int_{\partial \Omega_w} \delta p (n_x \cos \alpha + n_y \sin \alpha) dS - \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \psi^{\top}}{\partial \xi} \delta F + \frac{\partial \psi^{\top}}{\partial \eta} \delta G \right) dV \\ &\quad + \int_{\partial \Omega_f} (n_1 \psi^{\top} \delta F + n_2 \psi^{\top} \delta G) dS + \int_{\partial \Omega_w} (n_1 \psi^{\top} \delta F + n_2 \psi^{\top} \delta G) dS \\ &\quad + \frac{1}{C_{\text{ref}}} \int_{\partial \Omega_w} C_p (\delta n_x \cos \alpha + \delta n_y \sin \alpha) dS. \end{aligned} \quad (4.61)$$

Ferner gilt

$$\int_{\partial \Omega_w} (n_1 \psi^{\top} \delta F + n_2 \psi^{\top} \delta G) dS = - \int_{\partial \Omega_w} \psi^{\top} \delta G dS, \quad (4.62)$$

da $n_1 = 0$ und demnach $n_2 = -1$ auf der Profilwand $\partial \Omega_w$.

Auf $\partial \Omega_w$ gilt die Schlupfbedingung $V = 0$ und somit folgt weiter $G = J \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} p \\ \frac{\partial \eta}{\partial y} p \\ 0 \end{pmatrix}$.

Nun läßt sich δG berechnen als

$$\delta G = J \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} \delta p \\ \frac{\partial \eta}{\partial y} \delta p \\ 0 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 0 \\ \delta \left(J \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \\ \delta \left(J \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.63)$$

Zusammen mit Satz 4.4.1 gilt nun

$$\begin{aligned} \delta C_D &= \frac{2}{\gamma M_\infty^2 p_\infty C_{\text{ref}}} \int_{\partial \Omega_w} \delta p (n_x \cos \alpha + n_y \sin \alpha) dS \\ &\quad - \int_{\Omega} \frac{\partial \psi^\top}{\partial \xi} \left(\delta \left(J \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) f + \delta \left(J \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) g + J \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial w} \delta w + J \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial w} \delta w \right) \\ &\quad + \frac{\partial \psi^\top}{\partial \eta} \left(\delta \left(J \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) f + \delta \left(J \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) g + J \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial w} \delta w + J \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial w} \delta w \right) dV \\ &\quad - \int_{\partial \Omega_w} \psi_2 \left(J \frac{\partial \eta}{\partial x} \delta p + p \delta \left(J \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \right) + \psi_3 \left(J \frac{\partial \eta}{\partial y} \delta p + p \delta \left(J \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) \right) dS \\ &\quad + \int_{\partial \Omega_f} n_1 \psi^\top \delta F + n_2 \psi^\top \delta G dS + \frac{1}{C_{\text{ref}}} \int_{\partial \Omega_w} C_p (\delta n_x \cos \alpha + \delta n_y \sin \alpha) dS. \quad (4.64) \end{aligned}$$

Berechnet man den Gradienten der Zielfunktion $\nabla_X I$ mittels Finiten Differenzen, so sind es gerade die δw -Terme in Gleichung (4.64), die bei n Entwurfsvariablen $n + 1$ Strömungsberechnungen erzwingen - sie beschreiben gerade die Änderung der Strömungsphysik nach Änderung der Profilgeometrie. Diese Vorgehensweise würde mit zunehmender Anzahl von Entwurfsvariablen numerisch immer unerschwinglicher.

Bei der Herleitung von Gleichung (4.64) war die Wahl des Lagrangemultiplikators ψ allerdings beliebig. Wir wählen nun ψ gerade derart, daß genau diese δw -Terme verschwinden. Dann steckt die physikalische Information in eben diesem ψ , das die adjungierten Euler-Gleichungen erfüllt, und der numerische Aufwand reduziert sich auf nur eine Strömungs- und eine adjungierte Strömungsberechnung, unabhängig von der Anzahl der Entwurfsvariablen. Man erhält somit die folgende Aussage:

Satz 4.4.2 *Erfüllt ψ die adjungierten Euler-Gleichungen*

$$- \left(\frac{\partial f}{\partial w} \right)^\top \frac{\partial \psi}{\partial x} - \left(\frac{\partial g}{\partial w} \right)^\top \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0 \quad (4.65)$$

im Strömungsgebiet Ω mit den Randbedingungen

$$n_x \psi_2 + n_y \psi_3 = - \frac{2(n_x \cos \alpha + n_y \sin \alpha)}{\gamma M_\infty^2 p_\infty C_{\text{ref}}} \quad (4.66)$$

auf der Profilwand $\partial \Omega_w$ und

$$\delta \left(J \frac{\partial \xi}{\partial x} \right), \dots, \delta \left(J \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) \rightarrow 0, \quad \psi^\top J \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial w} \delta w = 0, \dots, \psi^\top J \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial w} \delta w = 0 \quad (4.67)$$

auf dem Fernfeldrand $\partial\Omega_f$, so läßt sich δC_D berechnen durch

$$\begin{aligned} \delta C_D = & - \int_{\Omega} \frac{\partial \psi^\top}{\partial \xi} (\delta y_\eta f - \delta x_\eta g) + \frac{\partial \psi^\top}{\partial \eta} (-\delta y_\xi f + \delta x_\xi g) dV - \int_{\partial\Omega_w} p (-\psi_2 \delta y_\xi + \psi_3 \delta x_\xi) dS \\ & + \frac{1}{C_{\text{ref}}} \int_{\partial\Omega_w} C_p (\delta n_x \cos \alpha + \delta n_y \sin \alpha) dS. \end{aligned} \quad (4.68)$$

□

Beweis:

Das Betrachten von Gleichung (4.64) unter der Forderung, daß die δw -Terme verschwinden sollen, liefert Gleichung (4.65):

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \psi^\top}{\partial \xi} \left(J \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial w} + J \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial w} \right) - \frac{\partial \psi^\top}{\partial \eta} \left(J \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial w} + J \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial w} \right) & \stackrel{!}{=} 0 \\ \Leftrightarrow - \left(\frac{\partial f}{\partial w} \right)^\top \frac{\partial \psi}{\partial x} - \left(\frac{\partial g}{\partial w} \right)^\top \frac{\partial \psi}{\partial y} & \stackrel{!}{=} 0. \end{aligned}$$

Das Betrachten von Gleichung (4.64) unter der Forderung, daß die δp -Terme verschwinden sollen, liefert Gleichung (4.66):

$$J \frac{\partial \eta}{\partial x} \psi_2 + J \frac{\partial \eta}{\partial y} \psi_3 \stackrel{!}{=} -y_\xi \psi_2 + x_\xi \psi_3 = -n_x \psi_2 - n_y \psi_3 \stackrel{!}{=} \frac{2(n_x \cos \alpha + n_y \sin \alpha)}{\gamma M_\infty^2 p_\infty C_{\text{ref}}},$$

₁ siehe (*) aus dem Beweis zu Satz 4.1.1.

Die Gleichungen (4.67) beschreiben mit

$$\delta \left(J \frac{\partial \xi}{\partial x} \right), \dots, \delta \left(J \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) \rightarrow 0$$

zum einen das Festhalten der geometrischen Lage des Fernfeldrandes $\partial\Omega_f$ sowie mit

$$\psi^\top J \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial w} \delta w \stackrel{!}{=} 0, \dots, \psi^\top J \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial w} \delta w \stackrel{!}{=} 0$$

die Forderung, daß am Fernfeldrand $\partial\Omega_f$ die Änderung der Profilgeometrie von $\partial\Omega_w(X)$ zu $\partial\Omega_w(X + \delta X)$ keine Änderung δw der Strömung mit sich bringt. Das führt zusammen mit Satz 4.4.1 zu

$$\int_{\partial\Omega_f} n_1 \psi^\top \delta F + n_2 \psi^\top \delta G dS = 0.$$

Insgesamt läßt sich dann schließlich Gleichung (4.64) zu Gleichung (4.68) reduzieren:

$$\begin{aligned} \delta C_D = & - \int_{\Omega} \frac{\partial \psi^\top}{\partial \xi} \left(\delta \left(J \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) f + \delta \left(J \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) g \right) + \frac{\partial \psi^\top}{\partial \eta} \left(\delta \left(J \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) f + \delta \left(J \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) g \right) dV \\ & - \int_{\partial\Omega_w} p \left(\psi_2 \delta \left(J \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + \psi_3 \delta \left(J \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) \right) dS + \frac{1}{C_{\text{ref}}} \int_{\partial\Omega_w} C_p (\delta n_x \cos \alpha + \delta n_y \sin \alpha) dS \\ =_1 & - \int_{\Omega} \frac{\partial \psi^\top}{\partial \xi} (\delta y_\eta f - \delta x_\eta g) + \frac{\partial \psi^\top}{\partial \eta} (-\delta y_\xi f + \delta x_\xi g) dV - \int_{\partial\Omega_w} p (-\psi_2 \delta y_\xi + \psi_3 \delta x_\xi) dS \\ & + \frac{1}{C_{\text{ref}}} \int_{\partial\Omega_w} C_p (\delta n_x \cos \alpha + \delta n_y \sin \alpha) dS, \end{aligned}$$

¹ siehe (*) aus dem Beweis zu Satz 4.1.1. ■

Die adjungierten Euler-Gleichungen (4.65) sind linear in ψ und wie man sieht, ist die adjungierte Randbedingung (4.66) an der Profilwand $\partial\Omega_w$ abhängig von der Zielfunktion I der Optimierungsaufgabe.

Wir haben die folgende Erweiterung zu Satz 4.4.2:

Satz 4.4.3 *Erfüllt ψ die adjungierten Euler-Gleichungen*

$$-\left(\frac{\partial f}{\partial w}\right)^\top \frac{\partial \psi}{\partial x} - \left(\frac{\partial g}{\partial w}\right)^\top \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0 \quad (4.69)$$

im Strömungsgebiet Ω mit den Randbedingungen

$$n_x \psi_2 + n_y \psi_3 = d(I) \quad (4.70)$$

auf der Profilwand $\partial\Omega_w$ und

$$\delta \left(J \frac{\partial \xi}{\partial x} \right), \dots, \delta \left(J \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) \rightarrow 0, \quad \psi^\top J \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial w} \delta w = 0, \dots, \psi^\top J \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial w} \delta w = 0 \quad (4.71)$$

auf dem Fernfeldrand $\partial\Omega_f$, so läßt sich δI berechnen durch

$$\begin{aligned} \delta I = & - \int_{\Omega} \frac{\partial \psi^\top}{\partial \xi} (\delta y_\eta f - \delta x_\eta g) + \frac{\partial \psi^\top}{\partial \eta} (-\delta y_\xi f + \delta x_\xi g) dV - \int_{\partial\Omega_w} p (-\psi_2 \delta y_\xi + \psi_3 \delta x_\xi) dS \\ & + K(I). \end{aligned} \quad (4.72)$$

Dabei ist für die Widerstandsoptimierung, d.h. $I = C_D$,

$$d(C_D) = - \frac{2}{\gamma M_\infty^2 p_\infty C_{\text{ref}}} (n_x \cos \alpha + n_y \sin \alpha) \quad (4.73)$$

und

$$K(C_D) = \frac{1}{C_{\text{ref}}} \int_{\partial\Omega_w} C_p (\delta n_x \cos \alpha + \delta n_y \sin \alpha) dl, \quad (4.74)$$

für die Auftriebsoptimierung, d.h. $I = C_L$,

$$d(C_L) = - \frac{2}{\gamma M_\infty^2 p_\infty C_{\text{ref}}} (n_y \cos \alpha - n_x \sin \alpha) \quad (4.75)$$

und

$$K(C_L) = \frac{1}{C_{\text{ref}}} \int_{\partial\Omega_w} C_p (\delta n_y \cos \alpha - \delta n_x \sin \alpha) dl \quad (4.76)$$

und für die Optimierung des Nickmomentes, d.h. $I = C_m$,

$$d(C_m) = - \frac{2}{\gamma M_\infty^2 p_\infty C_{\text{ref}}^2} (n_y (x - x_m) - n_x (y - y_m)) \quad (4.77)$$

und

$$K(C_m) = \frac{1}{C_{\text{ref}}^2} \int_{\partial\Omega_w} C_p \delta (n_y (x - x_m) - n_x (y - y_m)) dl. \quad (4.78)$$

□

Beweis:

Man ersetze die Formulierung für die Variation des Widerstandsbeiwertes (4.60) durch die entsprechenden Variationen für den Auftriebs-

$$\begin{aligned}\delta C_L &= \frac{2}{\gamma M_\infty^2 p_\infty C_{\text{ref}}} \int_{\partial\Omega_w} \delta p (n_y \cos \alpha - n_x \sin \alpha) dl \\ &\quad + \frac{1}{C_{\text{ref}}} \int_{\partial\Omega_w} C_p (\delta n_y \cos \alpha - \delta n_x \sin \alpha) dl\end{aligned}\quad (4.79)$$

sowie Nickmomentenbeiwert

$$\begin{aligned}\delta C_m &= \frac{2}{\gamma M_\infty^2 p_\infty C_{\text{ref}}^2} \int_{\partial\Omega_w} \delta p (n_y (x - x_m) - n_x (y - y_m)) dl \\ &\quad + \frac{1}{C_{\text{ref}}^2} \int_{\partial\Omega_w} C_p \delta (n_y (x - x_m) - n_x (y - y_m)) dl.\end{aligned}\quad (4.80)$$

und verfahren genau wie oben. ■

Da in der adjungierten Formulierung (4.72) eine Integration über das gesamte Strömungsfeld Ω vorkommt, nennen wir diese im folgenden auch die Volumenformulierung der Gradienten der Zielfunktionen und Nebenbedingungen.

4.4.5 Berechnung der Gradienten der Zielfunktionen und Nebenbedingungen

In diesem Abschnitt wird nun gezeigt, wie man die Gradienten der Zielfunktionen oder Nebenbedingungen numerisch auswerten kann. Als ein Beispiel wird hier mit

$$\begin{aligned}\delta C_D &= - \int_{\Omega} \frac{\partial \psi^\top}{\partial \xi} (\delta y_\eta f - \delta x_\eta g) + \frac{\partial \psi^\top}{\partial \eta} (-\delta y_\xi f + \delta x_\xi g) dV - \int_{\partial\Omega_w} p (-\psi_2 \delta y_\xi + \psi_3 \delta x_\xi) dS \\ &\quad + \frac{1}{C_{\text{ref}}} \int_{\partial\Omega_w} C_p (\delta n_x \cos \alpha + \delta n_y \sin \alpha) dS\end{aligned}$$

die Variation des Widerstandsbeiwertes C_D , verursacht durch eine Variation des Vektors der Entwurfsvariablen, gewählt.

Es sei

$$R : \begin{cases} \mathbb{R}_{\geq 0}^2 \supset \Omega & \rightarrow [0, 1] \\ (\xi, \eta) & \mapsto R(\xi, \eta) \end{cases}, \quad (4.81)$$

$$R(\xi, 0) = 1, \quad R(\xi, \eta_f(\xi)) = 0, \quad (4.82)$$

wobei $\eta_f(\xi)$ jeweils die Bogenlängen der Netzlinien von den Wandpunkten $(\xi, 0)$ zum Fernfeldrand seien. Es gelte also $\partial\Omega_w = \{(\xi, 0)\}$ und $\partial\Omega_f = \{(\xi, \eta_f(\xi))\}$.

Definiert man das Netz $\{(x_{(X+\delta X)}, y_{(X+\delta X)})\}$ zur gestörten Geometrie $\partial\Omega_w(X + \delta X)$ als

$$\begin{aligned}x_{(X+\delta X)} &:= x_X + R \cdot (x_{(X+\delta X)_w} - x_{X_w}), \\ y_{(X+\delta X)} &:= y_X + R \cdot (y_{(X+\delta X)_w} - y_{X_w}),\end{aligned}$$

dabei bezeichne der Index w wieder die Werte auf der Wand, der Index X die Werte zur Ausgangsgeometrie $\partial\Omega_w(X)$, so ist

$$\delta x = R\delta x_w, \quad \delta y = R\delta y_w$$

und man erhält ferner

$$\begin{aligned} \delta x_\xi &= \partial_\xi(R\delta x_w) = R\delta x_{\xi w} + R_\xi\delta x_w, & \delta y_\xi &= \partial_\xi(R\delta y_w) = R\delta y_{\xi w} + R_\xi\delta y_w, \\ \delta x_\eta &= \partial_\eta(R\delta x_w) = R\delta x_{\eta w} + R_\eta\delta x_w, & \delta y_\eta &= \partial_\eta(R\delta y_w) = R\delta y_{\eta w} + R_\eta\delta y_w \end{aligned}$$

und schließlich

$$\begin{aligned} \delta C_D &= - \int_{\partial\Omega_w} \left(\delta y_{\eta w} \int_0^{\eta_f(\xi)} \frac{\partial \psi^\top}{\partial \xi} R f \, d\eta \right) d\xi - \int_{\partial\Omega_w} \left(\delta y_w \int_0^{\eta_f(\xi)} \frac{\partial \psi^\top}{\partial \xi} R_\eta f \, d\eta \right) d\xi \\ &\quad + \int_{\partial\Omega_w} \left(\delta x_{\eta w} \int_0^{\eta_f(\xi)} \frac{\partial \psi^\top}{\partial \xi} R g \, d\eta \right) d\xi + \int_{\partial\Omega_w} \left(\delta x_w \int_0^{\eta_f(\xi)} \frac{\partial \psi^\top}{\partial \xi} R_\eta g \, d\eta \right) d\xi \\ &\quad + \int_{\partial\Omega_w} \left(\delta y_{\xi w} \int_0^{\eta_f(\xi)} \frac{\partial \psi^\top}{\partial \eta} R f \, d\eta \right) d\xi + \int_{\partial\Omega_w} \left(\delta y_w \int_0^{\eta_f(\xi)} \frac{\partial \psi^\top}{\partial \eta} R_\xi f \, d\eta \right) d\xi \\ &\quad - \int_{\partial\Omega_w} \left(\delta x_{\xi w} \int_0^{\eta_f(\xi)} \frac{\partial \psi^\top}{\partial \eta} R g \, d\eta \right) d\xi - \int_{\partial\Omega_w} \left(\delta x_w \int_0^{\eta_f(\xi)} \frac{\partial \psi^\top}{\partial \eta} R_\xi g \, d\eta \right) d\xi \\ &\quad - \int_{\partial\Omega_w} p (-\psi_2 \delta y_{\xi w} + \psi_3 \delta x_{\xi w}) \, d\xi + \frac{1}{C_{\text{ref}}} \int_{\partial\Omega_w} C_p (\delta y_{\xi w} \cos \alpha - \delta x_{\xi w} \sin \alpha) \, d\xi. \end{aligned} \quad (4.83)$$

Auf der Profilwand muß gelten

$$\begin{aligned} \delta x_\xi(\xi, 0) &= \delta x_{\xi w} + R_\xi(\xi, 0)\delta x_w \stackrel{!}{=} \delta x_{\xi w}, & \delta y_\xi(\xi, 0) &= \delta y_{\xi w} + R_\xi(\xi, 0)\delta y_w \stackrel{!}{=} \delta y_{\xi w}, \\ \delta x_\eta(\xi, 0) &= \delta x_{\eta w} + R_\eta(\xi, 0)\delta x_w \stackrel{!}{=} \delta x_{\eta w}, & \delta y_\eta(\xi, 0) &= \delta y_{\eta w} + R_\eta(\xi, 0)\delta y_w \stackrel{!}{=} \delta y_{\eta w} \end{aligned}$$

und nach (4.67) aus Satz 4.4.2 muß am Fernfeldrand gelten

$$\begin{aligned} \delta x_\xi(\xi, \eta_f(\xi)) &= R_\xi(\xi, \eta_f(\xi))\delta x_w \stackrel{!}{=} 0, & \delta y_\xi(\xi, \eta_f(\xi)) &= R_\xi(\xi, \eta_f(\xi))\delta y_w \stackrel{!}{=} 0, \\ \delta x_\eta(\xi, \eta_f(\xi)) &= R_\eta(\xi, \eta_f(\xi))\delta x_w \stackrel{!}{=} 0, & \delta y_\eta(\xi, \eta_f(\xi)) &= R_\eta(\xi, \eta_f(\xi))\delta y_w \stackrel{!}{=} 0. \end{aligned}$$

Somit muß für R zusätzlich zu (4.82) gelten

$$R_\xi(\xi, 0) \stackrel{!}{=} 0, \quad R_\xi(\xi, \eta_f(\xi)) \stackrel{!}{=} 0, \quad (4.84)$$

$$R_\eta(\xi, 0) \stackrel{!}{=} 0, \quad R_\eta(\xi, \eta_f(\xi)) \stackrel{!}{=} 0. \quad (4.85)$$

Natürlich muß ferner R für alle ξ streng monoton fallend in $\eta \in]0, \eta_f(\xi)[$ sein. Beispielsweise erfüllen

$$R_1 : \begin{cases} \mathbb{R}_{\geq 0}^2 \supset \Omega & \rightarrow [0, 1] \\ (\xi, \eta) & \mapsto 2 \left(\frac{\eta}{\eta_f(\xi)} - \frac{1}{2} \right)^3 - \frac{3}{2} \frac{\eta}{\eta_f(\xi)} + \frac{5}{4} \end{cases} \quad (4.86)$$

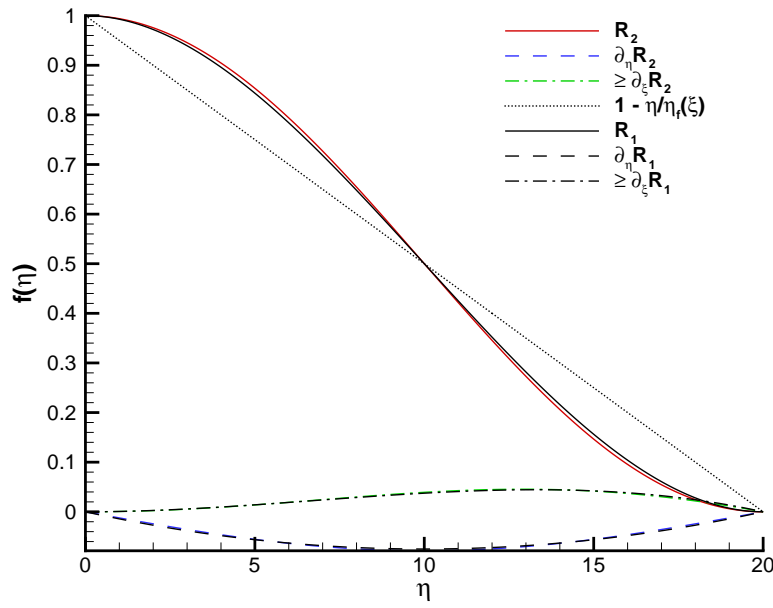


Abbildung 4.4: Netzdeformationsfunktionen $R_{1,2}$ für $\eta_f(\xi) = 20C_{\text{ref}} = 20$.

und

$$R_2 : \begin{cases} \mathbb{R}_{\geq 0}^2 \supset \Omega & \rightarrow [0, 1] \\ (\xi, \eta) & \mapsto \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\eta}{\eta_f(\xi)}\pi\right) \end{cases}, \quad (4.87)$$

mit

$$\partial_\xi R_1(\xi, \eta) = -6 \left(\frac{\eta}{\eta_f(\xi)} - \frac{1}{2} \right)^2 \frac{\eta}{\eta_f^2(\xi)} \partial_\xi \eta_f(\xi) + \frac{3}{2} \frac{\eta}{\eta_f^2(\xi)} \partial_\xi \eta_f(\xi),$$

$$\partial_\eta R_1(\xi, \eta) = 6 \left(\frac{\eta}{\eta_f(\xi)} - \frac{1}{2} \right)^2 \frac{1}{\eta_f(\xi)} - \frac{3}{2} \frac{1}{\eta_f(\xi)}$$

und

$$\partial_\xi R_2(\xi, \eta) = \frac{\eta\pi}{2\eta_f^2(\xi)} \partial_\xi \eta_f(\xi) \sin\left(\frac{\eta}{\eta_f(\xi)}\pi\right),$$

$$\partial_\eta R_2(\xi, \eta) = -\frac{\pi}{2\eta_f(\xi)} \sin\left(\frac{\eta}{\eta_f(\xi)}\pi\right),$$

die Forderungen (4.82), (4.84) sowie (4.85) und sind für alle ξ in $]0, \eta_f(\xi)[$ jeweils streng monoton fallend in η .

Wie man in Abbildung 4.4 deutlich sehen kann, sind die Funktionswerte von $\partial_{\xi,\eta} R_{1,2}$ im Vergleich zu den Funktionswerten von $R_{1,2}$ vernachlässigbar klein.

Vernachlässigt man nun bei der Auswertung von (4.83) die zu den Termen $\partial_{\xi,\eta} R_{1,2}$ zugehörigen Integrale und approximiert die Netzdeformationsfunktionen $R_{1,2}$ durch

$$\bar{R} : \begin{cases} \mathbb{R}_{\geq 0}^2 \supset \Omega & \rightarrow [0, 1] \\ (\xi, \eta) & \mapsto 1 - \frac{\eta}{\eta_f(\xi)} \end{cases}, \quad (4.88)$$

so erhält man insgesamt die Approximation

$$\begin{aligned} \delta C_D \approx & - \int_{\partial\Omega_w} \left(\delta y_{\eta_w} \int_0^{\eta_f(\xi)} \frac{\partial \psi^\top}{\partial \xi} \bar{R} f \, d\eta \right) d\xi + \int_{\partial\Omega_w} \left(\delta x_{\eta_w} \int_0^{\eta_f(\xi)} \frac{\partial \psi^\top}{\partial \xi} \bar{R} g \, d\eta \right) d\xi \\ & + \int_{\partial\Omega_w} \left(\delta y_{\xi_w} \int_0^{\eta_f(\xi)} \frac{\partial \psi^\top}{\partial \eta} \bar{R} f \, d\eta \right) d\xi - \int_{\partial\Omega_w} \left(\delta x_{\xi_w} \int_0^{\eta_f(\xi)} \frac{\partial \psi^\top}{\partial \eta} \bar{R} g \, d\eta \right) d\xi \\ & - \int_{\partial\Omega_w} p (-\psi_2 \delta y_{\xi_w} + \psi_3 \delta x_{\xi_w}) \, d\xi + \frac{1}{C_{\text{ref}}} \int_{\partial\Omega_w} C_p (\delta y_{\xi_w} \cos \alpha - \delta x_{\xi_w} \sin \alpha) \, d\xi. \end{aligned} \quad (4.89)$$

Abbildung 4.5 zeigt die Güte dieser Approximation und rechtfertigt somit deren Ein-

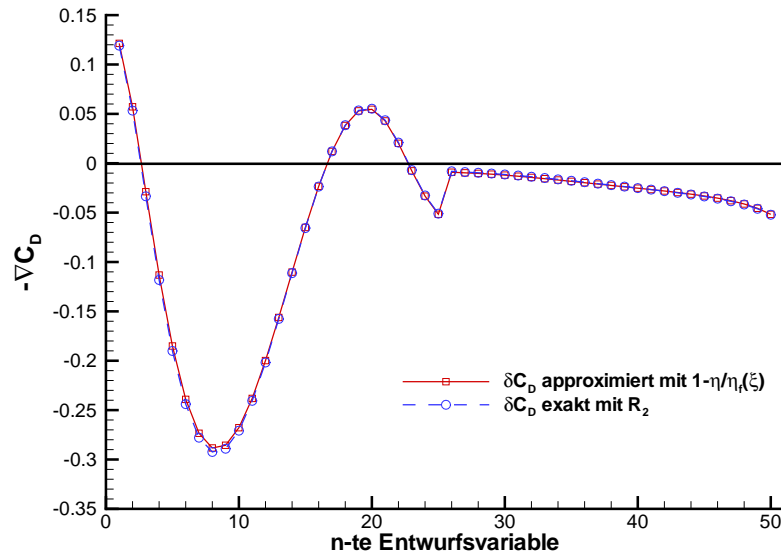


Abbildung 4.5: Vergleich der Auswertungen von δC_D mittels (4.83) und (4.89) für das RAE2822-Profil, bei $Ma = 0.73$, $\alpha = 2^\circ$, zu den Koeffizienten von 50 Hicks-Henne-Funktionen als Entwurfsvariablen.

satz in der aerodynamischen Formoptimierung, so wie von Jameson et al. wohl zuerst praktiziert (siehe z.B. [JR94] und [KAJ02]). Ein Blick auf die partiellen Ableitungen von \bar{R} zeigt jedoch

$$\partial_\xi \bar{R}(\xi, \eta) = \frac{\eta}{\eta_f^2(\xi)} \partial_\xi \eta_f(\xi), \quad \partial_\eta \bar{R}(\xi, \eta) = -\frac{1}{\eta_f(\xi)},$$

daß \bar{R} dabei weder die Forderung (4.84) noch die Forderung (4.85) erfüllt.

4.5 Eigenschaften der (adjungierten) Euler-Gleichungen und Randbedingungen

Die nachfolgenden Definitionen und Sätze entstammen dem Lehrbuch [GKO95] von H. O. Kreiss et al. und dienen in den nächsten beiden Abschnitten der Charakterisierung der Euler- bzw. adjungierten Euler-Gleichungen.

Definition 4.5.1 *Man betrachte das System partieller Differentialgleichungen erster Ordnung*

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \sum_{\nu=1}^d A_{\nu} \frac{\partial w}{\partial x_{\nu}}. \quad (4.90)$$

Dabei hänge $w = (w_1, \dots, w_n)^{\top}$ von $x = (x_1, \dots, x_d)^{\top}$ und t ab und die Matrizen $A_{\nu} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ seien konstant.

Ferner betrachte man nun alle Linearkombinationen

$$P(\omega) = \sum_{\nu=1}^d \omega_{\nu} A_{\nu}, \quad \omega \in S^d := \{\omega : \omega \in \mathbb{R}^d \wedge \|\omega\|_2 = 1\}.$$

Dann heißt das System (4.90)

1. *strikt hyperbolisch, wenn für alle $\omega \in S^d$ die Eigenwerte von $P(\omega)$ reell und paarweise verschieden sind,*
2. *symmetrisch hyperbolisch, wenn alle Matrizen A_{ν} , $\nu = 1 \dots, d$ Hermitesch sind,*
3. *stark hyperbolisch, wenn für alle $\omega \in S^d$ eine nichtsinguläre Transformation $T(\omega)$ existiert, so daß*

$$T^{-1}(\omega)P(\omega)T(\omega) = \Lambda(\omega)$$

mit

$$\Lambda(\omega) = \text{diag}(\lambda_1(\omega), \dots, \lambda_n(\omega)), \quad \lambda_j(\omega) \in \mathbb{R}$$

gilt und es eine Konstante $K > 0$ gibt, so daß für alle $\omega \in S^d$

$$\sup_{\|\omega\|_2=1} (\|T(\omega)\|_2 + \|T^{-1}(\omega)\|_2) \leq K$$

gilt. ($\|T\|_2 := \sup_{\|x\|_2=1} \|Tx\|_2$)

4. *schwach hyperbolisch, wenn für alle $\omega \in S^d$ die Eigenwerte von $P(\omega)$ reell sind.*

Satz 4.5.2 *Ist das System (4.90) strikt oder symmetrisch hyperbolisch, so ist es auch stark hyperbolisch. Ferner ist jedes stark hyperbolische System auch schwach hyperbolisch. ■*

Definition 4.5.3 Das Anfangswertproblem zu (4.90)

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \sum_{\nu=1}^d A_{\nu} \frac{\partial w}{\partial x_{\nu}}, \quad w(x, t_0) = f(x)$$

heißt wohlgestellt, wenn für jedes t_0 und jedes $f \in \mathcal{C}^{\infty}(x)$ gilt:

1. Es existiert eine eindeutige Lösung $w(x, t) \in \mathcal{C}^{\infty}(x, t)$, die in jeder Raumdimension x_j 2π -periodisch ist und
2. es gibt Konstanten α und K , unabhängig von f und t_0 , so daß

$$\|w(\cdot, t)\| \leq K e^{\alpha(t-t_0)} \|f(\cdot)\|$$

gilt.

Satz 4.5.4 Das Anfangswertproblem zu (4.90) ist für stark hyperbolische Systeme wohlgestellt. ■

Definition 4.5.5 Das System

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \sum_{\nu=1}^d A_{\nu}(x, t) \frac{\partial w}{\partial x_{\nu}}, \quad (4.91)$$

mit variablen Koeffizientenmatrizen $A_{\nu}(x, t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, heißt strikt, symmetrisch, stark oder schwach hyperbolisch, wenn für alle $x = x'$, $t = t'$ das System (4.90) mit den konstanten Koeffizientenmatrizen $A_{\nu} = A_{\nu}(x', t')$ nach Definition (4.5.1) strikt, symmetrisch, stark oder schwach hyperbolisch ist.

4.5.1 Eigenschaften der (quasi-)instationären Euler-Gleichungen

Die Euler-Gleichungen in der Form (4.1)

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} = 0$$

heißen die (quasi-)instationären Euler-Gleichungen in der konservativen Form. Unter Ausnutzung der Kettenregel können sie in die sogenannte nicht-konservative Form gebracht werden:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial y} = 0. \quad (4.92)$$

Dabei lassen sich die Jacobi-Matrizen $\frac{\partial f}{\partial w}$, $\frac{\partial g}{\partial w}$ wie folgt bestimmen:

$$A_1 := \frac{\partial f}{\partial w} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -u^2 + \frac{\gamma-1}{2}q^2 & -(\gamma-3)u & -(\gamma-1)v & \gamma-1 \\ -uv & v & u & 0 \\ u(-\gamma E + (\gamma-1)q^2) & \gamma E - (\gamma-1)\left(u^2 + \frac{q^2}{2}\right) & -(\gamma-1)uv & \gamma u \end{pmatrix}, \quad (4.93)$$

$$A_2 := \frac{\partial g}{\partial w} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -uv & v & u & 0 \\ -v^2 + \frac{\gamma-1}{2}q^2 & -(\gamma-1)u & -(\gamma-3)v & \gamma-1 \\ v(-\gamma E + (\gamma-1)q^2) & -(\gamma-1)uv & \gamma E - (\gamma-1)\left(v^2 + \frac{q^2}{2}\right) & \gamma v \end{pmatrix}, \quad (4.94)$$

mit $q^2 := u^2 + v^2$.

Führt man nun neben den konservativen Variablen

$$w = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho E \end{pmatrix}$$

die primitiven Variablen

$$\tilde{w} := \begin{pmatrix} \rho \\ u \\ v \\ p \end{pmatrix} \quad (4.95)$$

ein, so läßt sich das nicht-konservative System (4.92), wieder unter Ausnutzung der Kettenregel, überführen in:

$$\frac{\partial w}{\partial \tilde{w}} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial \tilde{w}} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial \tilde{w}} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial y} = 0. \quad (4.96)$$

Dabei läßt sich $\frac{\partial w}{\partial \tilde{w}}$ wie folgt bestimmen:

$$M := \frac{\partial w}{\partial \tilde{w}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ u & \rho & 0 & 0 \\ v & 0 & \rho & 0 \\ \frac{q^2}{2} & u\rho & v\rho & \frac{1}{\gamma-1} \end{pmatrix}. \quad (4.97)$$

Die Inverse zu M ist dann gegeben durch:

$$M^{-1} = \frac{\partial \tilde{w}}{\partial w} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{u}{\rho} & \frac{1}{\rho} & 0 & 0 \\ -\frac{v}{\rho} & 0 & \frac{1}{\rho} & 0 \\ \frac{\gamma-1}{2}q^2 & (1-\gamma)u & (1-\gamma)v & \gamma-1 \end{pmatrix}. \quad (4.98)$$

Unter Verwendung obiger Bezeichnungen und Multiplikation von Gleichung (4.96) mit M^{-1} von links erhält man:

$$\frac{\partial \tilde{w}}{\partial t} + M^{-1} A_1 M \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x} + M^{-1} A_2 M \frac{\partial \tilde{w}}{\partial y} = 0.$$

Führt man nun ferner

$$\tilde{A}_1 := M^{-1} A_1 M = \begin{pmatrix} u & \rho & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 & \frac{1}{\rho} \\ 0 & 0 & u & 0 \\ 0 & \gamma p & 0 & u \end{pmatrix} \quad (4.99)$$

und

$$\tilde{A}_2 := M^{-1}A_2M = \begin{pmatrix} v & 0 & \rho & 0 \\ 0 & v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v & \frac{1}{\rho} \\ 0 & 0 & \gamma p & v \end{pmatrix} \quad (4.100)$$

ein, so erhält man schließlich die nicht-konservativen (quasi-)instationären Euler-Gleichungen in primitiven Variablen

$$\frac{\partial \tilde{w}}{\partial t} + \tilde{A}_1 \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x} + \tilde{A}_2 \frac{\partial \tilde{w}}{\partial y} = 0. \quad (4.101)$$

Die Jacobi-Matrizen \tilde{A}_1 und \tilde{A}_2 zu den primitiven Variablen sind dünner besetzt und deren Komponenten von einfacherer Gestalt als die der Jacobi-Matrizen A_1 und A_2 zu den konservativen Variablen. Ihre Eigenwerte lassen sich sehr leicht bestimmen als

$$\text{spec}(\tilde{A}_1) = \{u, u, u - a, u + a\}, \quad (4.102)$$

$$\text{spec}(\tilde{A}_2) = \{v, v, v - a, v + a\}. \quad (4.103)$$

Dabei ist a die Schallgeschwindigkeit, die man für ideale Gase aus der Beziehung

$$a^2 = \frac{\gamma p}{\rho}$$

erhält.

Für den Fall konstanter Jacobi-Matrizen \tilde{A}_1 und \tilde{A}_2 prüfen wir nun den hyperbolischen Charakter nach Definition 4.5.1 der (quasi-)instationären Euler-Gleichungen (4.101) in primitiven Variablen. Folglich betrachten wir die Matrizen

$$\tilde{P}(\omega) = \omega_1 \tilde{A}_1 + \omega_2 \tilde{A}_2 = \begin{pmatrix} \omega_1 u + \omega_2 v & \omega_1 \rho & \omega_2 \rho & 0 \\ 0 & \omega_1 u + \omega_2 v & 0 & \omega_1 \frac{1}{\rho} \\ 0 & 0 & \omega_1 u + \omega_2 v & \omega_2 \frac{1}{\rho} \\ 0 & \omega_1 \gamma p & \omega_2 \gamma p & \omega_1 u + \omega_2 v \end{pmatrix}, \quad (4.104)$$

mit $\omega \in S^2 := \{\omega : \omega \in \mathbb{R}^2 \wedge \|\omega\|_2 = 1\}$.

Für die Spektren jener Matrizen $\tilde{P}(\omega)$ erhalten wir

$$\text{spec}(\tilde{P}(\omega)) = \{\omega_1 u + \omega_2 v, \omega_1 u + \omega_2 v, \omega_1 u + \omega_2 v - a, \omega_1 u + \omega_2 v + a\}. \quad (4.105)$$

Da die Matrizen $\tilde{P}(\omega)$ weder paarweise verschiedene Eigenwerte besitzen noch Hermitesch sind, sind die (quasi-)instationären Euler-Gleichungen in primitiven Variablen zu konstanten Jacobi-Matrizen weder strikt noch symmetrisch hyperbolisch.

Um zu überprüfen, ob sie wenigstens stark und somit auch schwach hyperbolisch sind, betrachten wir nun die zum Spektrum (4.105) zugehörigen Eigenvektoren bzw. Eigenräume:

Zum doppelten Eigenwert $\lambda_{1,2}(\omega) = \omega_1 u + \omega_2 v$ erhalten wir dann den Eigenraum

$$ER_{1,2}(\omega) = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{a^2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \omega_2 \\ -\omega_1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad (4.106)$$

zum Eigenwert $\lambda_3(\omega) = \omega_1 u + \omega_2 v - a$ den Eigenvektor

$$EV_3(\omega) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2a^2} \\ -\omega_1 \frac{1}{2\rho a} \\ -\omega_2 \frac{1}{2\rho a} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (4.107)$$

und zum Eigenwert $\lambda_4(\omega) = \omega_1 u + \omega_2 v + a$ den Eigenvektor

$$EV_4(\omega) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2a^2} \\ \omega_1 \frac{1}{2\rho a} \\ \omega_2 \frac{1}{2\rho a} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \quad (4.108)$$

Für alle $\omega \in S^2$ existiert dann zur Matrix

$$T(\omega) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{a^2} & 0 & \frac{1}{2a^2} & \frac{1}{2a^2} \\ 0 & \omega_2 & -\omega_1 \frac{1}{2\rho a} & \omega_1 \frac{1}{2\rho a} \\ 0 & -\omega_1 & -\omega_2 \frac{1}{2\rho a} & \omega_2 \frac{1}{2\rho a} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad (4.109)$$

in der spaltenweise die Eigenvektoren zur Matrix $\tilde{P}(\omega)$ stehen, die Inverse

$$T^{-1}(\omega) = \begin{pmatrix} -a^2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \omega_2 & -\omega_1 & 0 \\ 0 & -\omega_1 \rho a & -\omega_2 \rho a & 1 \\ 0 & \omega_1 \rho a & \omega_2 \rho a & 1 \end{pmatrix} \quad (4.110)$$

und es gilt

$$\begin{aligned} \Lambda(\omega) &= \text{diag}(\lambda_1(\omega), \lambda_2(\omega), \lambda_3(\omega), \lambda_4(\omega)) \\ &= \text{diag}(\omega_1 u + \omega_2 v, \omega_1 u + \omega_2 v, \omega_1 u + \omega_2 v - a, \omega_1 u + \omega_2 v + a) \\ &= T^{-1}(\omega) \tilde{P}(\omega) T(\omega). \end{aligned} \quad (4.111)$$

Einfacherweise schätzt man schnell grob wie folgt nach oben ab:

$$\begin{aligned} \sup_{\|\omega\|_2=1} \left(\sup_{\|\tilde{w}\|_2=1} \|T(\omega) \tilde{w}\|_2 \right) &\leq \left\| T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|_2 \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|_2 \\ &\leq \left\| \begin{pmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 & \frac{1}{2a^2} & \frac{1}{2a^2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2\rho a} & \frac{1}{2\rho a} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2\rho a} & \frac{1}{2\rho a} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|_2 \\ &\leq \left\| \begin{pmatrix} \frac{2}{a^2} \\ 1 + \frac{1}{\rho a} \\ 1 + \frac{1}{\rho a} \\ 1 \end{pmatrix} \right\|_2 \\ &\leq \sqrt{\frac{4}{a^4} + 2 \left(1 + \frac{1}{\rho a} \right)^2 + 1} \end{aligned} \quad (4.112)$$

und analog

$$\begin{aligned} \sup_{\|\omega\|_2=1} \left(\sup_{\|\tilde{w}\|_2=1} \|T^{-1}(\omega)\tilde{w}\|_2 \right) &\leq \left\| \begin{pmatrix} 1+a^2 \\ 2 \\ 1+2\rho a \\ 1+2\rho a \end{pmatrix} \right\|_2 \\ &\leq \sqrt{(1+a^2)^2 + (1+2\rho a)^2 + 4}. \end{aligned} \quad (4.113)$$

Mit

$$K := \sqrt{\frac{4}{a^4} + 2 \left(1 + \frac{1}{\rho a}\right)^2} + 1 + \sqrt{(1+a^2)^2 + (1+2\rho a)^2 + 4}$$

gilt dann

$$\sup_{\|\omega\|_2=1} (\|T(\omega)\|_2 + \|T^{-1}(\omega)\|_2) \leq K.$$

Somit sind alle Voraussetzungen nach Definition 4.5.1(3) erfüllt und es folgt:

Satz 4.5.6 Die (quasi-)instationären Euler-Gleichungen (4.101) in primitiven Variablen zu konstanten Jacobi-Matrizen \tilde{A}_1 und \tilde{A}_2 sind stark hyperbolisch. ■

Zusammen mit Satz (4.5.4) folgt dann weiter:

Satz 4.5.7 Das Anfangswertproblem

$$\frac{\partial \tilde{w}}{\partial t} + \tilde{A}_1 \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x} + \tilde{A}_2 \frac{\partial \tilde{w}}{\partial y} = 0, \quad \tilde{w}((x, y), t_0) = f((x, y)),$$

für die (quasi-)instationären Euler-Gleichungen in primitiven Variablen zu konstanten Jacobi-Matrizen \tilde{A}_1, \tilde{A}_2 ist wohlgestellt. ■

Da die Jacobi-Matrizen \tilde{A}_1 und \tilde{A}_2 nicht direkt von t und (x, y) abhängen, sondern nur indirekt von $\tilde{w}((x, y), t)$, folgt ferner nach Definition 4.5.5:

Satz 4.5.8 Die (quasi-)instationären Euler-Gleichungen (4.101) in primitiven Variablen sind stark hyperbolisch. ■

Unter Ausnutzung der Beziehungen (4.99) und (4.100) sowie (4.111) erhält man ferner

$$\begin{aligned} P(\omega) &= \omega_1 A_1 + \omega_2 A_2 \\ &= \omega_1 M \tilde{A}_1 M^{-1} + \omega_2 M \tilde{A}_2 M^{-1} \\ &= M(\omega_1 \tilde{A}_1 + \omega_2 \tilde{A}_2) M^{-1} \\ &= M \tilde{P}(\omega) M^{-1} \\ &= M T(\omega) \Lambda(\omega) T^{-1}(\omega) M^{-1} \\ &= (M T(\omega)) \Lambda(\omega) (M T(\omega))^{-1}. \end{aligned} \quad (4.114)$$

Weiter existiert

$$\beta := \max\{\|M\|_2, \|M^{-1}\|_2\} < \infty$$

und es gilt

$$\begin{aligned} \sup_{\|\omega\|_2=1} (\|MT(\omega)\|_2 + \|(MT(\omega))^{-1}\|_2) &\leq \sup_{\|\omega\|_2=1} (\|M\|_2 \|T(\omega)\|_2 + \|M^{-1}\|_2 \|T^{-1}(\omega)\|_2) \\ &\leq \beta \sup_{\|\omega\|_2=1} (\|T(\omega)\|_2 + \|T^{-1}(\omega)\|_2) \\ &\leq \beta K. \end{aligned} \quad (4.115)$$

Somit sind wieder alle Voraussetzungen nach Definition 4.5.1(3) erfüllt und es folgt wieder mit gleicher Argumentation nach Definition 4.5.5:

Satz 4.5.9 Die (quasi-)stationären Euler-Gleichungen (4.92) sind stark hyperbolisch. ■

4.5.2 Eigenschaften der (quasi-)stationären adjungierten Euler-Gleichungen

Die adjungierten Euler-Gleichungen haben die gleichen Eigenschaften wie die Euler-Gleichungen im vorigen Abschnitt:

Satz 4.5.10 Auch für die entsprechenden adjungierten Euler-Gleichungen gelten die Aussagen der Sätze 4.5.6, 4.5.7, 4.5.8 und 4.5.9. □

Beweis:

Man gehe vor wie im vorangegangenen Abschnitt für

$$\begin{aligned} \hat{P}(\omega) &= \omega_1 A_1^\top + \omega_2 A_2^\top \\ &= (\omega_1 A_1 + \omega_2 A_2)^\top \\ &= [(MT(\omega))\Lambda(\omega)(MT(\omega))^{-1}]^\top \\ &= [(MT(\omega))^{-1}]^\top \Lambda(\omega)(MT(\omega))^\top \\ &= [(MT(\omega))^\top]^{-1} \Lambda(\omega)(MT(\omega))^\top. \end{aligned} \quad (4.116)$$

■

4.5.3 Die adjungierten Euler-Randoperatoren

Sei w die Lösung der stationären Euler-Gleichungen

$$\frac{\partial f(w)}{\partial x} + \frac{\partial g(w)}{\partial y} = 0 \quad (4.117)$$

zu einer zu optimierenden Ausgangsgeometrie $\partial\Omega_w(X)$ und sei ferner δw die durch Variation eben dieser Ausgangsgeometrie verursachte Variation der Strömungslösung w , also $w + \delta w$ die Lösung der Euler-Gleichungen

$$\frac{\partial f(w + \delta w)}{\partial x} + \frac{\partial g(w + \delta w)}{\partial y} = 0 \quad (4.118)$$

zur variierten Geometrie $\partial\Omega_w(X + \delta X)$.

Es gilt dann freilich

$$f(w + \delta w) = f(w) + \frac{\partial f(w)}{\partial w} \delta w + \mathcal{O}(\delta^2), \quad (4.119)$$

$$g(w + \delta w) = g(w) + \frac{\partial g(w)}{\partial w} \delta w + \mathcal{O}(\delta^2). \quad (4.120)$$

Lösen wir dann anstelle von (4.118) die in w linearisierten Euler-Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(f(w) + \underbrace{\frac{\partial f(w)}{\partial w} \delta w}_{=: A_1} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(g(w) + \underbrace{\frac{\partial g(w)}{\partial w} \delta w}_{=: A_2} \right) &= \\ = \underbrace{\frac{\partial f(w)}{\partial x} + \frac{\partial g(w)}{\partial y}}_{\stackrel{!}{=} 0} + \frac{\partial}{\partial x} (A_1 \delta w) + \frac{\partial}{\partial y} (A_2 \delta w) &= 0 \\ \Leftrightarrow \mathcal{L} \delta w \equiv \frac{\partial}{\partial x} (A_1 \delta w) + \frac{\partial}{\partial y} (A_2 \delta w) &= 0, \end{aligned} \quad (4.121)$$

so erhalten wir mit δw die lineare Störungslösung.

Partielle Integration auf $\Omega(X)$ liefert

$$\begin{aligned} (\psi, \mathcal{L} \delta w)_\Omega &= \left(\psi, \frac{\partial}{\partial x} (A_1 \delta w) + \frac{\partial}{\partial y} (A_2 \delta w) \right)_\Omega \\ &= \left(-A_1^\top \frac{\partial \psi}{\partial x} - A_2^\top \frac{\partial \psi}{\partial y}, \delta w \right)_\Omega + (\psi, (n_x A_1 + n_y A_2) \delta w)_{\partial\Omega} \\ &= (\mathcal{L}^* \psi, \delta w)_\Omega + (\psi, A_n \delta w)_{\partial\Omega}, \end{aligned} \quad (4.122)$$

wobei $\vec{n} := \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \end{pmatrix}$ der nach außen gerichtete Rand-Einheitsnormalenvektor auf $\partial\Omega(X)$ ist und $A_n := n_x A_1 + n_y A_2$.

Die adjungierten in w linearisierten Euler-Gleichungen lauten also

$$\mathcal{L}^* \psi \equiv -A_1^\top \frac{\partial \psi}{\partial x} - A_2^\top \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0. \quad (4.123)$$

Das primale Problem (P) und das duale Problem (D) aus Abschnitt 3.2.4 lauten somit:

<p>(P) Bestimme $\delta I = (d, \mathcal{C} \delta w)_{\partial\Omega}$, wobei $\mathcal{L} \delta w = 0$ in Ω und $\mathcal{B} \delta w = c$ auf $\partial\Omega$.</p>	<p>(D) Bestimme $\delta I^* = (\mathcal{C}^* \psi, c)_{\partial\Omega}$, wobei $\mathcal{L}^* \psi = 0$ in Ω und $\mathcal{B}^* \psi = d$ auf $\partial\Omega$.</p>
---	---

A_n entspricht $P(\vec{n})$ aus Definition 4.5.1, lässt sich also nach Gleichung (4.114) wie folgt diagonalisieren:

$$A_n = P(\vec{n}) = (MT(\vec{n})) \Lambda(\vec{n}) (MT(\vec{n}))^{-1}, \quad (4.124)$$

wobei mit $q_n := n_x u + n_y v$

$$\begin{aligned} \Lambda(\vec{n}) &= \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \\ &= \text{diag}(q_n, q_n, q_n - a, q_n + a) \end{aligned} \quad (4.125)$$

und

$$T(\vec{n}) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{a^2} & 0 & \frac{1}{2a^2} & \frac{1}{2a^2} \\ 0 & n_y & -n_x \frac{1}{2\rho a} & n_x \frac{1}{2\rho a} \\ 0 & -n_x & -n_y \frac{1}{2\rho a} & n_y \frac{1}{2\rho a} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad T^{-1}(\vec{n}) = \begin{pmatrix} -a^2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & n_y & -n_x & 0 \\ 0 & -n_x \rho a & -n_y \rho a & 1 \\ 0 & n_x \rho a & n_y \rho a & 1 \end{pmatrix} \quad (4.126)$$

ist (M und M^{-1} können den Gleichungen (4.97) und (4.98) entnommen werden).

Satz 4.5.11 *Es sei w der Vektor der konservativen Variablen. Dann ist die Abbildung*

$$\tau : \left\{ \begin{array}{l} G \subseteq (\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}^3) \rightarrow \tau[G] \subseteq (\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}^3) \\ \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{pmatrix} = w \mapsto \tilde{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ \frac{w_2}{w_1} \\ \frac{w_3}{w_1} \\ (\gamma - 1) \left(w_4 - \frac{w_2^2 + w_3^2}{2w_1} \right) \end{pmatrix} \end{array} \right. \quad (4.127)$$

eine Bijektion und \tilde{w} sind die primitiven Variablen $\tilde{w} = \begin{pmatrix} \rho \\ u \\ v \\ p \end{pmatrix}$.

Die Jacobi-Matrizen $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ und die Darstellungsmatrizen $B, C^* \in \mathbb{R}^{k \times 4}$ sowie $C, B^* \in \mathbb{R}^{l \times 4}$ ($k + l \leq 4$) der primalen und dualen Randoperatoren lauten dann in primitiven Variablen:

$$\tilde{A}_1(\tilde{w}) = M^{-1}(w)A_1(w)M(w), \quad \tilde{A}_2(\tilde{w}) = M^{-1}(w)A_2(w)M(w), \quad (4.128)$$

$$\tilde{B}(\tilde{w}) = B(w)M(w), \quad \tilde{C}(\tilde{w}) = C(w)M(w), \quad (4.129)$$

$$\tilde{B}^*(\tilde{w}) = B^*(w)(M^{-1}(w))^\top, \quad \tilde{C}^*(\tilde{w}) = C^*(w)(M^{-1}(w))^\top. \quad (4.130)$$

□

Beweis:

Man zeigt leicht, daß mit

$$\tau^{-1} : \begin{pmatrix} \tilde{w}_1 \\ \tilde{w}_2 \\ \tilde{w}_3 \\ \tilde{w}_4 \end{pmatrix} = \tilde{w} \mapsto w = \begin{pmatrix} \tilde{w}_1 \\ \tilde{w}_1 \tilde{w}_2 \\ \tilde{w}_1 \tilde{w}_3 \\ \frac{1}{\gamma-1} \tilde{w}_4 + \frac{1}{2} \tilde{w}_1 (\tilde{w}_2^2 + \tilde{w}_3^2) \end{pmatrix} \quad (4.131)$$

eine Umkehrabbildung zu τ gegeben ist. ■

Wir definieren die folgenden Operatoren und Beziehungen:

$$\mathcal{L} \delta w \equiv \frac{\partial}{\partial x}(A_1 \delta w) + \frac{\partial}{\partial y}(A_2 \delta w), \quad (4.132)$$

$$\mathcal{L}^* \delta w \equiv -A_1^\top \frac{\partial \psi}{\partial x} - A_2^\top \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad (4.133)$$

$$\mathcal{B} \delta w \equiv B \delta w, \quad (4.134)$$

$$\mathcal{C} \delta w \equiv C \delta w, \quad (4.135)$$

$$\mathcal{B}^* \delta w \equiv B^* \delta w, \quad (4.136)$$

$$\mathcal{C}^* \delta w \equiv C^* \delta w, \quad (4.137)$$

$$\mathcal{A}_n \delta w \equiv (n_x A_1 + n_y A_2) \delta w = A_n \delta w, \quad (4.138)$$

$$\tau^{-1} \uparrow \quad \downarrow \tau$$

$$\tilde{\mathcal{L}} \delta \tilde{w} \equiv \frac{\partial}{\partial x}(\tilde{A}_1 \delta \tilde{w}) + \frac{\partial}{\partial y}(\tilde{A}_2 \delta \tilde{w}), \quad (4.139)$$

$$\tilde{\mathcal{L}}^* \delta \tilde{w} \equiv -\tilde{A}_1^\top \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial x} - \tilde{A}_2^\top \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial y}, \quad (4.140)$$

$$\tilde{\mathcal{B}} \delta \tilde{w} \equiv \tilde{B} \delta \tilde{w}, \quad (4.141)$$

$$\tilde{\mathcal{C}} \delta \tilde{w} \equiv \tilde{C} \delta \tilde{w}, \quad (4.142)$$

$$\tilde{\mathcal{B}}^* \delta \tilde{w} \equiv \tilde{B}^* \delta \tilde{w}, \quad (4.143)$$

$$\tilde{\mathcal{C}}^* \delta \tilde{w} \equiv \tilde{C}^* \delta \tilde{w}, \quad (4.144)$$

$$\tilde{\mathcal{A}}_n \delta \tilde{w} \equiv (n_x \tilde{A}_1 + n_y \tilde{A}_2) \delta \tilde{w} = \underbrace{M^{-1} A_n M}_{=:\tilde{A}_n} \delta \tilde{w}. \quad (4.145)$$

Partielle Integration liefert ferner

$$\begin{aligned} (\tilde{\psi}, \tilde{\mathcal{L}} \delta \tilde{w})_\Omega &= \left(\tilde{\psi}, \frac{\partial}{\partial x}(\tilde{A}_1 \delta \tilde{w}) + \frac{\partial}{\partial y}(\tilde{A}_2 \delta \tilde{w}) \right)_\Omega \\ &= \left(-\tilde{A}_1^\top \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial x} - \tilde{A}_2^\top \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial y}, \delta \tilde{w} \right)_\Omega + \left(\tilde{\psi}, (n_x \tilde{A}_1 + n_y \tilde{A}_2) \delta \tilde{w} \right)_{\partial\Omega} \\ &= (\tilde{\mathcal{L}}^* \tilde{\psi}, \delta \tilde{w})_\Omega + \left(\tilde{\psi}, \tilde{A}_n \delta \tilde{w} \right)_{\partial\Omega}, \end{aligned} \quad (4.146)$$

und wir erhalten somit den folgenden Satz:

Satz 4.5.12 Die Operatoren seien wie oben definiert. Dann gilt:

(P)	Bestimme	$\delta I = (d, \mathcal{C} \delta w)_{\partial\Omega},$	(D)	Bestimme	$\delta I^* = (\mathcal{C}^* \psi, c)_{\partial\Omega},$
	wobei	$\mathcal{L} \delta w = 0$ in Ω	\Leftrightarrow	wobei	$\mathcal{L}^* \psi = 0$ in Ω
	und	$\mathcal{B} \delta w = c$ auf $\partial\Omega.$		und	$\mathcal{B}^* \psi = d$ auf $\partial\Omega.$

$$(\tau^{-1} \uparrow \downarrow \tau) \quad \Updownarrow \quad (\tau^{-1} \uparrow \downarrow \tau)$$

(P)	Bestimme	$\delta \tilde{I} = (\tilde{d}, \tilde{\mathcal{C}} \delta \tilde{w})_{\partial\Omega},$	(D)	Bestimme	$\delta \tilde{I}^* = (\tilde{\mathcal{C}}^* \tilde{\psi}, \tilde{c})_{\partial\Omega},$
	wobei	$\tilde{\mathcal{L}} \delta \tilde{w} = 0$ in Ω	\Leftrightarrow	wobei	$\tilde{\mathcal{L}}^* \tilde{\psi} = 0$ in Ω
	und	$\tilde{\mathcal{B}} \delta \tilde{w} = \tilde{c}$ auf $\partial\Omega.$		und	$\tilde{\mathcal{B}}^* \tilde{\psi} = \tilde{d}$ auf $\partial\Omega.$

■

Es ist

$$\tilde{A}_n = n_x \tilde{A}_1 + n_y \tilde{A}_2 = M^{-1} A_n M = \tilde{P}(\vec{n}) = T(\vec{n}) \Lambda(\vec{n}) T^{-1}(\vec{n}), \quad (4.147)$$

man vergleiche auch mit den Gleichungen (4.111) und (4.124).

Es ist also

$$\tilde{\psi}^\top \tilde{A}_n \delta \tilde{w} = \tilde{\psi}^\top T(\vec{n}) \Lambda(\vec{n}) T^{-1}(\vec{n}) \delta \tilde{w}. \quad (4.148)$$

Wir führen nun die primalen charakteristischen Variablen

$$w_c := T^{-1}(\vec{n}) \delta \tilde{w} = \begin{pmatrix} -a^2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & n_y & -n_x & 0 \\ 0 & -n_x \rho a & -n_y \rho a & 1 \\ 0 & n_x \rho a & n_y \rho a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta \rho \\ \delta u \\ \delta v \\ \delta p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta p - a^2 \delta \rho \\ \delta q_t \\ \delta p - a \rho \delta q_n \\ \delta p + a \rho \delta q_n \end{pmatrix}, \quad (4.149)$$

wobei $\delta q_n := n_x \delta u + n_y \delta v$ und $\delta q_t := n_y \delta u - n_x \delta v$ ist, und die dualen charakteristischen Variablen

$$\psi_c := T^\top(\vec{n}) \tilde{\psi} \quad (4.150)$$

ein. Dann gilt

$$\tilde{\psi}^\top \tilde{A}_n \delta \tilde{w} = \tilde{\psi}^\top T(\vec{n}) \Lambda(\vec{n}) T^{-1}(\vec{n}) \delta \tilde{w} = \psi_c^\top \Lambda(\vec{n}) w_c. \quad (4.151)$$

Wir wollen nun (die Vorgehensweise aus dem Beweis zu) Satz 3.2.1 aus Kapitel 3 verwenden, um die adjungierten Randoperatoren zu den in w linearisierten Euler-Gleichungen in primitiven bzw. charakteristischen Variablen zu bestimmen:

Mit

$$A = \Lambda(\vec{n}), \quad \Phi = w_c, \quad \Psi = \psi_c \quad (4.152)$$

gilt gerade

$$\left(\tilde{\psi}, \tilde{A}_n \delta \tilde{w} \right)_{\partial\Omega} = \left(\tilde{\psi}, \tilde{A}_n \delta \tilde{w} \right)_{\partial\Omega} = (\psi_c, \Lambda(\vec{n}) w_c)_{\partial\Omega} = \int_{\partial\Omega} \Psi^\top A \Phi dS. \quad (4.153)$$

Im folgenden betrachten wir nun Matrizen B_c und C_c , die das Wirken der Randoperatoren $\tilde{\mathcal{B}}$ und $\tilde{\mathcal{C}}$ beschreiben:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{B}} \delta \tilde{w} &\equiv B_c w_c \quad \text{auf } \partial\Omega , \\ \tilde{\mathcal{C}} \delta \tilde{w} &\equiv C_c w_c \quad \text{auf } \partial\Omega .\end{aligned}$$

Fernfeldrandbedingungen:

1. Subsonischer Ausströmrand, d.h. $0 < q_n < a$:

Für die Charakteristiken λ_i , die als die Eigenwerte von A_n und \tilde{A}_n auf der Diagonalen von $\Lambda(\vec{n})$ stehen, gilt dann

$$\lambda_1 > 0, \quad \lambda_2 > 0, \quad \lambda_3 < 0, \quad \lambda_4 > 0. \quad (4.154)$$

Nach der Theorie von Kreiss [Kre70] dürfen nur die reinlaufenden Charakteristiken, das sind gerade die Charakteristiken für die $\lambda_i < 0$ gilt, am Rand vorgegeben werden. Die rauslaufenden Charakteristiken, für die $\lambda_i > 0$ gilt, müssen aus dem Inneren des Strömungsfeldes extrapoliert werden. Diese Vorgehensweise ist notwendig für die Wohlgestelltheit.

Für den Randoperator $\tilde{\mathcal{B}}$ am subsonischen Ausströmrand gilt folglich

$$\tilde{\mathcal{B}} \delta \tilde{w} \equiv B_c w_c = w_{c3}, \quad (4.155)$$

und somit

$$B_c = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1 \times 4}. \quad (4.156)$$

Setzen wir nun

$$\tilde{\mathcal{C}} \delta \tilde{w} \equiv C_c w_c = \begin{pmatrix} w_{c1} \\ w_{c2} \\ w_{c4} \end{pmatrix}, \quad (4.157)$$

so ist

$$C_c = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 4}, \quad (4.158)$$

und

$$T_c := \begin{pmatrix} B_c \\ C_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4} \quad (4.159)$$

ist, genauso wie $\Lambda(\vec{n})$, invertierbar und die Voraussetzungen für Satz 3.2.1 sind erfüllt. Genauso wie im Beweis zu Satz 3.2.1 bestimmen wir über die Zerlegung

$$\Lambda(\vec{n}) = T_c^* T_c \quad (4.160)$$

die Matrizen $B_c^* \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ und $C_c^* \in \mathbb{R}^{1 \times 4}$ aus

$$T_c^* := \begin{pmatrix} -C_c^* \\ B_c^* \end{pmatrix}. \quad (4.161)$$

Da hier $T_c^{-1} = T_c^\top$, gilt

$$T_c^* = (\Lambda(\vec{n})T_c^\top)^\top = T_c\Lambda(\vec{n}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{pmatrix}, \quad (4.162)$$

somit

$$C_c^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\lambda_3 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_c^* = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{pmatrix}, \quad (4.163)$$

und letztlich

$$\tilde{B}^* \tilde{\psi} \equiv B_c^* \psi_c = \begin{pmatrix} \lambda_1 \psi_{c1} \\ \lambda_2 \psi_{c2} \\ \lambda_4 \psi_{c4} \end{pmatrix}, \quad \tilde{C}^* \tilde{\psi} \equiv C_c^* \psi_c = -\lambda_3 \psi_{c3}. \quad (4.164)$$

Die Charakteristiken des dualen Problems sind gerade die Eigenwerte der Matrix

$$\tilde{A}_n^* := n_x(-\tilde{A}_1^\top) + n_y(-\tilde{A}_2^\top) = -(n_x \tilde{A}_1 + n_y \tilde{A}_2)^\top = -\tilde{A}_n^\top. \quad (4.165)$$

Es ist also

$$\text{spec}(\tilde{A}_n^*) = \text{spec}(-\tilde{A}_n^\top) = \{-\lambda_1, -\lambda_2, -\lambda_3, -\lambda_4\}. \quad (4.166)$$

Aufgrund der gerade entgegengesetzten Vorzeichen in den Charakteristiken der primalen und dualen Probleme, korrespondiert jede rein-/raus-laufende Charakteristik des primalen Problems mit einer raus-/rein-laufenden Charakteristik des dualen Problems. Somit erfüllt die adjungierte Fernfeldrandbedingung (4.164)

$$\tilde{B}^* \tilde{\psi} \equiv B_c^* \psi_c = \begin{pmatrix} \lambda_1 \psi_{c1} \\ \lambda_2 \psi_{c2} \\ \lambda_4 \psi_{c4} \end{pmatrix}$$

die notwendige Bedingung für Wohlgestelltheit.

2. Subsonischer Einströmrand, d.h. $-a < q_n < 0$:

$$\Rightarrow \lambda_1 < 0, \quad \lambda_2 < 0, \quad \lambda_3 < 0, \quad \lambda_4 > 0. \quad (4.167)$$

Somit sind die Randoperatoren des subsonischen Einströmrandes gegeben mit

$$\tilde{B} \delta \tilde{w} \equiv \begin{pmatrix} w_{c1} \\ w_{c2} \\ w_{c3} \end{pmatrix}, \quad \tilde{C} \delta \tilde{w} \equiv w_{c4}. \quad (4.168)$$

Verfährt man nun genauso wie oben, so erhält man schließlich die adjungierten Randoperatoren des subsonischen Einströmrandes als

$$\tilde{B}^* \tilde{\psi} \equiv \lambda_4 \psi_{c4}, \quad \tilde{C}^* \tilde{\psi} \equiv \begin{pmatrix} -\lambda_1 \psi_{c1} \\ -\lambda_2 \psi_{c2} \\ -\lambda_3 \psi_{c3} \end{pmatrix}. \quad (4.169)$$

Körperwandrandbedingungen:

An der Körperwand $\partial\Omega_w(X)$ hat man für die Euler-Gleichungen die Schlupfbedingung

$$q_n = n_x u + n_y v \stackrel{!}{=} 0 \quad (4.170)$$

zu erfüllen, und somit muß an der Wand

$$\begin{aligned} \Lambda(\vec{n}) &= \text{diag}(q_n, q_n, q_n - a, q_n + a) \\ &\stackrel{!}{=} \text{diag}(0, 0, -a, a) =: \Lambda \end{aligned} \quad (4.171)$$

gelten. Es ist

$$\text{rang}(\Lambda) = 2 < 4. \quad (4.172)$$

Nach der Vorgehensweise des Beweises zu Satz 3.2.1 findet sich leicht die Zerlegung

$$\Lambda = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}}_{=:U'} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=:U'} \underbrace{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}}_{=: \Lambda'} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=:V'^\top}, \quad (4.173)$$

so daß mit

$$w'_c := V'^\top w_c = \begin{pmatrix} -w_{c3} \\ w_{c4} \end{pmatrix}, \quad \psi'_c := U'^\top \psi_c = \begin{pmatrix} \psi_{c3} \\ \psi_{c4} \end{pmatrix} \quad (4.174)$$

$$\psi_c^\top \Lambda w_c = \psi'_c{}^\top \Lambda' w'_c \quad (4.175)$$

gilt.

Wie wir in Abschnitt 4.4.4 gesehen haben, ist ein typischer Fall für die aerodynamische Geometrieoptimierung, daß in dem Funktional $\delta I = (d, \mathcal{C} \delta w)_{\partial\Omega}$ Terme von δp auftauchen. So z.B. bei der Widerstandsminimierung oder Auftriebsmaximierung.

Wir erhalten somit die folgenden Randoperatoren $\tilde{\mathcal{B}}$ und $\tilde{\mathcal{C}}$ an der Körperwand:

$$\tilde{\mathcal{B}} \delta \tilde{w} \equiv \delta q_n, \quad \tilde{\mathcal{C}} \delta \tilde{w} \equiv \delta p. \quad (4.176)$$

Es gilt ferner (man siehe Definition(4.149))

$$\delta q_n = \frac{w_{c4} - w_{c3}}{2\rho a}, \quad \delta p = \frac{w_{c4} + w_{c3}}{2}. \quad (4.177)$$

Mit den Matrizen

$$B'_c = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\rho a} & \frac{1}{2\rho a} \end{pmatrix}, \quad C'_c = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad (4.178)$$

erhalten wir dann schließlich

$$\tilde{\mathcal{B}} \delta \tilde{w} \equiv B'_c w'_c = \frac{w_{c4} - w_{c3}}{2\rho a} = \delta q_n, \quad \tilde{\mathcal{C}} \delta \tilde{w} \equiv C'_c w'_c = \frac{w_{c4} + w_{c3}}{2} = \delta p. \quad (4.179)$$

Die Matrix

$$T'_c := \begin{pmatrix} B'_c \\ C'_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\rho a} & \frac{1}{2\rho a} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (4.180)$$

ist genauso wie

$$\Lambda' = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \quad (4.181)$$

invertierbar und wir erhalten wieder, nach der Vorgehensweise aus dem Beweis zu Satz 3.2.1,

$$T_c^{l*} := \begin{pmatrix} -C_c^{l*} \\ B_c^{l*} \end{pmatrix} \quad (4.182)$$

über die Zerlegung

$$\Lambda' = T_c^{l* \top} T'_c \quad (4.183)$$

als

$$\begin{aligned} T_c^{l*} &= \left(\Lambda' T_c'^{-1} \right)^\top = \left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho a & -1 \\ \rho a & 1 \end{pmatrix} \right)^\top = \begin{pmatrix} \rho a^2 & -a \\ \rho a^2 & a \end{pmatrix}^\top \\ &= \begin{pmatrix} \rho a^2 & \rho a^2 \\ -a & a \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.184)$$

Somit lauten die adjungierten Randoperatoren an der Körperwand

$$\tilde{B}^* \tilde{\psi} \equiv B_c^{l*} \psi'_c = \begin{pmatrix} -a & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_{c3} \\ \psi_{c4} \end{pmatrix} = a(\psi_{c4} - \psi_{c3}) \quad (4.185)$$

und

$$\tilde{C}^* \tilde{\psi} \equiv C_c^{l*} \psi'_c = \begin{pmatrix} -\rho a^2 & -\rho a^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_{c3} \\ \psi_{c4} \end{pmatrix} = -\rho a^2(\psi_{c3} + \psi_{c4}). \quad (4.186)$$

Im folgenden wollen wir diese zu den charakteristischen bzw. primitiven Variablen ermittelten (adjungierten) Randoperatoren zu den konservativen Variablen angeben:

Nach Gleichung (4.124) haben wir

$$A_n = P(\vec{n}) = M T(\vec{n}) \Lambda(\vec{n}) T^{-1}(\vec{n}) M^{-1} \quad (4.187)$$

und an der Körperwand galt ferner

$$\Lambda(\vec{n}) = U' \Lambda' V'^\top, \quad (4.188)$$

wobei

$$\Lambda' = T_c^{l* \top} T'_c \quad (4.189)$$

war. Insgesamt haben wir also die folgenden Zerlegungen von A_n an der Körperwand:

$$\begin{aligned}
 A_n &= M \tilde{A}_n M^{-1} \\
 &= M \tilde{T}^{*\top} \tilde{T} M^{-1} \\
 &= M \left(T(\vec{n}) U' T_c'^{\top} \right) \left(T_c' V'^{\top} T^{-1}(\vec{n}) \right) M^{-1} \\
 &= \left(M T(\vec{n}) U' T_c'^{\top} \right) \left(T_c' V'^{\top} T^{-1}(\vec{n}) M^{-1} \right) \\
 &= T^{*\top} T,
 \end{aligned} \tag{4.190}$$

dabei ist $T^{*\top} \in \mathbb{R}^{4 \times 2}$ und $T \in \mathbb{R}^{2 \times 4}$. Ferner ist dann

$$\begin{aligned}
 T &= T_c' V'^{\top} T^{-1}(\vec{n}) M^{-1} \\
 &= \tilde{T} M^{-1}
 \end{aligned} \tag{4.191}$$

und

$$\begin{aligned}
 T^* &= \left(M T(\vec{n}) U' T_c'^{\top} \right)^{\top} \\
 &= T_c'^{\top} U'^{\top} T^{\top}(\vec{n}) M^{\top} \\
 &= \tilde{T}^* M^{\top}.
 \end{aligned} \tag{4.192}$$

Nach dem Zusammenspiel der Sätze 3.2.1, 4.5.11 und 4.5.12 können wir also in T die Darstellungsmatrizen B, C der Randoperatoren \mathcal{B}, \mathcal{C} zu den konservativen Variablen w und in T^* die Darstellungsmatrizen B^*, C^* zu den zugehörigen adjungierten Randoperatoren $\mathcal{B}^*, \mathcal{C}^*$ ablesen.

Es ist

$$T_c' V'^{\top} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\rho a} & \frac{1}{2\rho a} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2\rho a} & \frac{1}{2\rho a} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \tag{4.193}$$

Die ersten beiden Spalten in $T_c' V'^{\top}$ sind Nullspalten, d.h., daß zur Berechnung von $T = (T_c' V'^{\top})(T^{-1}(\vec{n}) M^{-1})$ nur die letzten beiden Zeilen von $T^{-1}(\vec{n}) M^{-1}$ berechnet werden müssen.

Mit

$$\begin{aligned}
 T^{-1}(\vec{n}) M^{-1} &= \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & -n_x \rho a & -n_y \rho a & 1 \\ 0 & n_x \rho a & n_y \rho a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{u}{\rho} & \frac{1}{\rho} & 0 & 0 \\ -\frac{v}{\rho} & 0 & \frac{1}{\rho} & 0 \\ \frac{\gamma-1}{2} q^2 & (1-\gamma)u & (1-\gamma)v & \gamma-1 \end{pmatrix} \\
 &= \left(\begin{array}{c|c|c|c} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (n_x u + n_y v)a + \frac{\gamma-1}{2} q^2 & -n_x a + (1-\gamma)u & -n_y a + (1-\gamma)v & \gamma-1 \\ -(n_x u + n_y v)a + \frac{\gamma-1}{2} q^2 & n_x a + (1-\gamma)u & n_y a + (1-\gamma)v & \gamma-1 \end{array} \right) \\
 &= \left(\begin{array}{c|c|c|c} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\gamma-1}{2} q^2 & -n_x a + (1-\gamma)u & -n_y a + (1-\gamma)v & \gamma-1 \\ \frac{\gamma-1}{2} q^2 & n_x a + (1-\gamma)u & n_y a + (1-\gamma)v & \gamma-1 \end{array} \right) \\
 &\quad (\text{da } n_x u + n_y v = 0 \text{ auf der Wand } \partial\Omega_w(X))
 \end{aligned} \tag{4.194}$$

erhalten wir folglich

$$\begin{aligned}
 T &= (T'_c V'^\top)(T^{-1}(\vec{n})M^{-1}) \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2\rho a} & \frac{1}{2\rho a} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \left(\begin{array}{c|c|c|c} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\gamma-1}{2}q^2 & -n_x a + (1-\gamma)u & -n_y a + (1-\gamma)v & \gamma-1 \\ \frac{\gamma-1}{2}q^2 & n_x a + (1-\gamma)u & n_y a + (1-\gamma)v & \gamma-1 \end{array} \right) \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & n_x \frac{1}{\rho} & n_y \frac{1}{\rho} & 0 \\ \frac{\gamma-1}{2}q^2 & (1-\gamma)u & (1-\gamma)v & \gamma-1 \end{pmatrix}. \quad (4.195)
 \end{aligned}$$

Weiter ist

$$T'^*_c U'^\top = \begin{pmatrix} \rho a^2 & \rho a^2 \\ -a & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \rho a^2 & \rho a^2 \\ 0 & 0 & -a & a \end{pmatrix}. \quad (4.196)$$

Die ersten beiden Spalten in $T'^*_c U'^\top$ sind Nullspalten, d.h., daß zur Berechnung von $T^* = (T'^*_c U'^\top)(T^\top(\vec{n})M^\top)$ nur die letzten beiden Zeilen von $T^\top(\vec{n})M^\top$ berechnet werden müssen.

Mit

$$\begin{aligned}
 T^\top(\vec{n})M^\top &= \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{2a^2} & -n_x \frac{1}{2\rho a} & -n_y \frac{1}{2\rho a} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2a^2} & n_x \frac{1}{2\rho a} & n_y \frac{1}{2\rho a} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & u & v & \frac{q^2}{2} \\ 0 & \rho & 0 & u\rho \\ 0 & 0 & \rho & v\rho \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\gamma-1} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{2a^2} & \frac{u}{2a^2} - \frac{n_x}{2a} & \frac{v}{2a^2} - \frac{n_y}{2a} & \frac{q^2}{4a^2} - \frac{n_x u}{2a} - \frac{n_y v}{2a} + \frac{1}{2(\gamma-1)} \\ \frac{1}{2a^2} & \frac{u}{2a^2} + \frac{n_x}{2a} & \frac{v}{2a^2} + \frac{n_y}{2a} & \frac{q^2}{4a^2} + \frac{n_x u}{2a} + \frac{n_y v}{2a} + \frac{1}{2(\gamma-1)} \end{pmatrix} \quad (4.197)
 \end{aligned}$$

erhalten wir folglich

$$\begin{aligned}
 T^* &= (T'^*_c U'^\top)(T^\top(\vec{n})M^\top) \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \rho a^2 & \rho a^2 \\ 0 & 0 & -a & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{2a^2} & \frac{u}{2a^2} - \frac{n_x}{2a} & \frac{v}{2a^2} - \frac{n_y}{2a} & \frac{q^2}{4a^2} - \frac{n_x u}{2a} - \frac{n_y v}{2a} + \frac{1}{2(\gamma-1)} \\ \frac{1}{2a^2} & \frac{u}{2a^2} + \frac{n_x}{2a} & \frac{v}{2a^2} + \frac{n_y}{2a} & \frac{q^2}{4a^2} + \frac{n_x u}{2a} + \frac{n_y v}{2a} + \frac{1}{2(\gamma-1)} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \rho & \rho u & \rho v & \rho(\frac{q^2}{2} + \frac{a^2}{\gamma-1}) \\ 0 & n_x & n_y & n_x u + n_y v \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \rho & \rho u & \rho v & \rho H \\ 0 & n_x & n_y & 0 \end{pmatrix}, \begin{cases} \text{da nach [Hir88]} H = \frac{q^2}{2} + \frac{a^2}{\gamma-1} \\ \text{da } n_x u + n_y v = 0 \text{ auf der Wand } \partial\Omega_w(X) \end{cases} \quad (4.198)
 \end{aligned}$$

Obige Überlegungen liefern zusammen mit Gleichung (4.195), daß

$$B = \begin{pmatrix} 0 & n_x \frac{1}{\rho} & n_y \frac{1}{\rho} & 0 \end{pmatrix} \quad (4.199)$$

und

$$C = \begin{pmatrix} \frac{\gamma-1}{2}q^2 & (1-\gamma)u & (1-\gamma)v & \gamma-1 \end{pmatrix} \quad (4.200)$$

ist. C entspricht gerade der letzten Zeile von $M^{-1} = \frac{\partial \tilde{w}}{\partial w}$ (man siehe (4.98)), es ist also

$$C = \frac{\partial p}{\partial w}. \quad (4.201)$$

Wir erhalten schließlich die primalen Körperwandrandbedingungen zu den konservativen Variablen

$$\begin{aligned} \mathcal{B}\delta w \equiv B\delta w &= \begin{pmatrix} 0 & n_x \frac{1}{\rho} & n_y \frac{1}{\rho} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta \rho \\ \delta(\rho u) \\ \delta(\rho v) \\ \delta(\rho E) \end{pmatrix} \\ &= n_x \frac{1}{\rho} \delta(\rho u) + n_y \frac{1}{\rho} \delta(\rho v) \\ &= n_x \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho u)}{\partial u} \delta u + n_y \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho v)}{\partial v} \delta v \\ &= n_x \delta u + n_y \delta v \\ &= \delta q_n \end{aligned} \quad (4.202)$$

und

$$\mathcal{C}\delta w \equiv C\delta w = \frac{\partial p}{\partial w} \delta w = \delta p \quad (4.203)$$

in Übereinstimmung mit den primalen Körperwandrandbedingungen (4.176) zu den primitiven Variablen.

Weiter liefern obige Überlegungen zusammen mit Gleichung (4.198), daß

$$B^* = \begin{pmatrix} 0 & n_x & n_y & 0 \end{pmatrix} \quad (4.204)$$

und

$$C^* = - \begin{pmatrix} \rho & \rho u & \rho v & \rho H \end{pmatrix} =: -w_H^\top \quad (4.205)$$

ist. Wir erhalten schließlich die entsprechenden adjungierten Körperwandrandbedingungen

$$\mathcal{B}^*\psi \equiv B^*\psi = n_x \psi_2 + n_y \psi_3 \quad (4.206)$$

und

$$\mathcal{C}^*\psi \equiv C^*\psi = -w_H^\top \psi. \quad (4.207)$$

Wir wollen nun das in Abschnitt 4.4.4 betrachtete Optimierungsproblem der Widerstandsminimierung in den hier hergeleiteten Beziehungen betrachten:

Insgesamt haben wir nach obigen Betrachtungen

$$(-d, \delta p)_{\partial\Omega} = (-w_H^\top \psi, -c)_{\partial\Omega} , \quad (4.208)$$

wenn

$$\mathcal{L} \delta w = 0 \quad \text{und} \quad \mathcal{L}^* \psi = 0 \quad (4.209)$$

in Ω erfüllt ist mit

$$\mathcal{B} \delta w \equiv \delta q_n = c \quad \text{und} \quad \mathcal{B}^* \psi \equiv n_x \psi_2 + n_y \psi_3 = d \quad (4.210)$$

auf $\partial\Omega$.

Nach Gleichung (4.60) aus Abschnitt 4.4.4 ist

$$\delta C_D = \frac{1}{C_{\text{ref}}} \int_{\partial\Omega_w} C_p (\delta n_x \cos \alpha + \delta n_y \sin \alpha) dS + \frac{2}{\gamma M_\infty^2 p_\infty C_{\text{ref}}} \int_{\partial\Omega_w} \delta p (n_x \cos \alpha + n_y \sin \alpha) dS .$$

Fordern wir nun, daß

$$\delta C_D \stackrel{!}{=} \frac{1}{C_{\text{ref}}} \int_{\partial\Omega_w} C_p (\delta n_x \cos \alpha + \delta n_y \sin \alpha) dS + (-d, \delta p)_{\partial\Omega_w} \quad (4.211)$$

ist, so muß

$$d \stackrel{!}{=} - \frac{2(n_x \cos \alpha + n_y \sin \alpha)}{\gamma M_\infty^2 p_\infty C_{\text{ref}}} \quad (4.212)$$

analog zu (4.73) sein.

Stört man die Körperwand $\partial\Omega_w(X)$ zu $\partial\Omega_w(X + \delta X)$, so hat man die Schlupfbedingung

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{!}{=} (n_x + \delta n_x)(u + \delta u) + (n_y + \delta n_y)(v + \delta v) \\ &= \underbrace{n_x u + n_y v}_{=0} + \underbrace{n_x \delta u + n_y \delta v}_{=q_n} + \delta n_x u + \delta n_y v + \delta n_x \delta u + \delta n_y \delta v \end{aligned} \quad (4.213)$$

zu erfüllen. Die Terme $\delta n_x \delta u$ und $\delta n_y \delta v$ sind dabei vernachlässigbar klein, so daß wir schließlich stattdessen

$$q_n \stackrel{!}{=} -\delta n_x u - \delta n_y v = c \quad (4.214)$$

fordern. Somit erhalten wir insgesamt alternativ zu (4.68) bzw. (4.72) aus Abschnitt 4.4.4

$$\begin{aligned} \delta C_D &\stackrel{(4.208)}{=} \frac{1}{C_{\text{ref}}} \int_{\partial\Omega_w} C_p (\delta n_x \cos \alpha + \delta n_y \sin \alpha) dS + (-w_H^\top \psi, -c)_{\partial\Omega} dS \\ &= \frac{1}{C_{\text{ref}}} \int_{\partial\Omega_w} C_p (\delta n_x \cos \alpha + \delta n_y \sin \alpha) dS - \int_{\partial\Omega_w} w_H^\top \psi (\delta n_x u + \delta n_y v) dS . \end{aligned} \quad (4.215)$$

Alternativ zu Satz 4.4.3 erhalten wir somit

Satz 4.5.13 Erfüllt ψ die adjungierten Euler-Gleichungen

$$-\left(\frac{\partial f}{\partial w}\right)^\top \frac{\partial \psi}{\partial x} - \left(\frac{\partial g}{\partial w}\right)^\top \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0 \quad (4.216)$$

im Strömungsgebiet Ω mit den Randbedingungen

$$n_x \psi_2 + n_y \psi_3 = d(I) \quad (4.217)$$

auf der Profilwand $\partial\Omega_w$ und

$$\delta \left(J \frac{\partial \xi}{\partial x} \right), \dots, \delta \left(J \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) \rightarrow 0, \quad \psi^\top J \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial w} \delta w = 0, \dots, \psi^\top J \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial w} \delta w = 0 \quad (4.218)$$

auf dem Fernfeldrand $\partial\Omega_f$, so läßt sich δI näherungsweise berechnen durch

$$\delta I = - \int_{\partial\Omega_w} w_H^\top \psi (\delta n_x u + \delta n_y v) dS + K(I). \quad (4.219)$$

Dabei ist für die Widerstandsoptimierung, d.h. $I = C_D$,

$$d(C_D) = - \frac{2}{\gamma M_\infty^2 p_\infty C_{\text{ref}}} (n_x \cos \alpha + n_y \sin \alpha) \quad (4.220)$$

und

$$K(C_D) = \frac{1}{C_{\text{ref}}} \int_{\partial\Omega_w} C_p (\delta n_x \cos \alpha + \delta n_y \sin \alpha) dl, \quad (4.221)$$

für die Auftriebsoptimierung, d.h. $I = C_L$,

$$d(C_L) = - \frac{2}{\gamma M_\infty^2 p_\infty C_{\text{ref}}} (n_y \cos \alpha - n_x \sin \alpha) \quad (4.222)$$

und

$$K(C_L) = \frac{1}{C_{\text{ref}}} \int_{\partial\Omega_w} C_p (\delta n_y \cos \alpha - \delta n_x \sin \alpha) dl \quad (4.223)$$

und für die Optimierung des Nickmomentes, d.h. $I = C_m$,

$$d(C_m) = - \frac{2}{\gamma M_\infty^2 p_\infty C_{\text{ref}}^2} (n_y (x - x_m) - n_x (y - y_m)) \quad (4.224)$$

und

$$K(C_m) = \frac{1}{C_{\text{ref}}^2} \int_{\partial\Omega_w} C_p \delta (n_y (x - x_m) - n_x (y - y_m)) dl. \quad (4.225)$$

□

Beweis:

Man ersetze die Formulierung für die Variation des Widerstandsbeiwertes (4.60) durch die entsprechenden Variationen für den Auftriebs-

$$\begin{aligned}\delta C_L &= \frac{2}{\gamma M_\infty^2 p_\infty C_{\text{ref}}} \int_{\partial\Omega_w} \delta p (n_y \cos \alpha - n_x \sin \alpha) dl \\ &\quad + \frac{1}{C_{\text{ref}}} \int_{\partial\Omega_w} C_p (\delta n_y \cos \alpha - \delta n_x \sin \alpha) dl\end{aligned}\quad (4.226)$$

sowie Nickmomentenbeiwert

$$\begin{aligned}\delta C_m &= \frac{2}{\gamma M_\infty^2 p_\infty C_{\text{ref}}^2} \int_{\partial\Omega_w} \delta p (n_y (x - x_m) - n_x (y - y_m)) dl \\ &\quad + \frac{1}{C_{\text{ref}}^2} \int_{\partial\Omega_w} C_p \delta (n_y (x - x_m) - n_x (y - y_m)) dl.\end{aligned}\quad (4.227)$$

und verfahren genau wie oben. ■

Da in der adjungierten Formulierung (4.219) nur eine Integration über die Oberfläche des zu optimierenden aerodynamischen Körpers vorkommt, nennen wir diese im folgenden auch die Oberflächenformulierung der Gradienten der Zielfunktionen und Nebenbedingungen.

Wie in Kapitel 6 noch eingehend gezeigt wird, ermöglicht die Oberflächenformulierung (4.219) die Handhabung komplexer 3D-Mehrblocktopologien. Wäre man bei komplexen 3D-Mehrblocktopologien auf die Gitterverschiebetechnik der Volumenformulierung aus Abschnitt 4.4.5 angewiesen, so wäre man genötigt eine große Anzahl von Sonderbehandlungen, beispielsweise zur Vermeidung von Überschneidungen bei der Verschiebung über Blockgrenzen hinweg, zu implementieren. Natürlich ist die Oberflächenformulierung auch numerisch effizienter.

5 Numerische Behandlung der Euler- und adjungierten Euler-Gleichungen in FLOWer

Vergleicht man die quasi-instationären Euler-Gleichungen mit den adjungierten quasi-instationären Euler-Gleichungen in der nicht-konservativen Form

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} = 0 &\Leftrightarrow \frac{\partial w}{\partial t} + \left(\frac{\partial f}{\partial w} \right) \frac{\partial w}{\partial x} + \left(\frac{\partial g}{\partial w} \right) \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \\ &\longleftrightarrow \frac{\partial \psi}{\partial t} + \left(\frac{\partial f}{\partial w} \right)^\top \frac{\partial \psi}{\partial x} + \left(\frac{\partial g}{\partial w} \right)^\top \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0, \end{aligned} \quad (5.1)$$

so wird leicht ersichtlich, daß man für beide Gleichungen den selben Löser benutzen kann.

Beide Gleichungen können beispielsweise in der quasi-instationären Form durch eine explizite zentrale Finite Volumenmethode unter Verwendung gemischter numerischer Dissipation 1. und 3. Ordnung, also dem zentralen Jameson-Schema (wie in [JST81] beschrieben), gelöst werden. Dieses Schema ist z.B. in dem Verfahren flo87s von A. Jameson [Jam88, Jam89, Jam94] sowohl zum Lösen der Euler- als auch der adjungierten Euler-Gleichungen implementiert. Das Programm flo87s ist ein vollständiges Optimierungssystem, welches neben den Lösern für die Euler- und die Adjungierten Euler-Gleichungen noch einen Netzgenerator, basierend auf Shared Parabolic Mappings, sowie das (unrestringierte) Optimierungsverfahren steilster Abstiege beinhaltet. Als Zielfunktion können sowohl der Widerstandsbeiwert als auch eine vorgegebene Zieldruckverteilung vorgegeben werden. Der Netzgenerator erzeugt strukturierte Einblocknetze, auf denen die Löser arbeiten. Als Parametrisierung des aerodynamischen Körpers dienen direkt die Netzknoten auf dessen Oberfläche.

Anstatt eine Erweiterung des Verfahrens flo87s für die Handhabung komplexer 3D-Mehrblockfälle vorzunehmen, so wie es A. Jameson tat [RJF⁺96, JMP98], wird im Rahmen dieser Arbeit ein Löser für die adjungierten Euler-Gleichungen in den strukturierten RANS-Löser FLOWer [RKe00] vorgenommen. Das Vorhandensein des Verfahrens flo87s beim DLR in Braunschweig war zu Validierungszwecken der Adjungierten-Implementierung in FLOWer von großem Wert.

Der mittlerweile rund 300.000 Programmzeilen umfassende Strömungslöser FLOWer wurde in der ersten Phase des DLR-Projektes MEGAFLOW [KRBT98] von 1995-1998 entwickelt und ist seitdem z.B. der Produktionscode bei der Airbus Deutschland GmbH. FLOWer löst basierend auf verschiedenen Finite-Volumen-Verfahren, so z.B. dem zentralen Jameson-Schema oder dem AUSM-Upwindschema (Advection Upstream Split-

ting Method) [LS93], die Reynolds-averaged Navier-Stokes-Gleichungen (RANS-Gleichungen) mit modellierter Turbulenz und Transition auf strukturierten Mehrblocknetzen.

Der Vorteil einer Implementierung eines Löser für die adjungierten Euler-Gleichungen in FLOWer ist, daß danach die gesamte komplexe Infrastruktur von FLOWer genutzt werden kann - so kann z.B. auf Mehrblocknetzen gerechnet werden. Bei der Implementierung in FLOWer müssen im Wesentlichen die Fluß- und Randbehandlungsroutinen modifiziert werden. Für die Gewichtung der Dissipation sowie für die Berechnung der Zeitschrittweiten werden in FLOWer die Spektralradien der Jacobi-Matrizen errechnet. Das Transponieren der Jacobi-Matrizen hat hier keinen Effekt, so daß für die Zeitschritt- und Dissipationsroutinen in der Adjungierten-Version FLOWer ADJOINT keine Änderungen vorgenommen werden müssen.

Im folgenden Abschnitt wird zunächst, basierend auf der Schrift [KJ87] von N. Kroll, beschrieben, wie die Euler-Gleichungen in FLOWer vermöge der Finiten Volumenmethode mit dem zentralen Jameson-Schema in zellzentrierter Metrik behandelt werden. Im darauffolgenden Abschnitt wird sodann die numerische Behandlung der adjungierten Euler-Gleichungen beschrieben, so wie sie auch letztlich im Rahmen dieser Arbeit in FLOWer implementiert wurde. Die Implementierung wurde jedoch gleich für die dreidimensionalen Euler-Gleichungen vorgenommen.

FLOWer löst im Modus MAIN zunächst die quasi-instationären Euler-Gleichungen und schreibt die Lösung in ein RESTART-File. Dann startet FLOWer im Modus ADJOINT und RESTART, d.h. die zuvor auskonvergierte Euler-Lösung wird eingelesen und in einem neu angelegten Array gespeichert. Die adjungierten Variablen werden nun in den Arrays für die ehemals konservativen Variablen gespeichert.

Im nächsten Kapitel werden u.a. Vergleichsrechnungen zwischen FLOWer ADJOINT und flo87s gezeigt.

5.1 Finite Volumenmethode zur Lösung der Euler-Gleichungen

5.1.1 Räumliche und zeitliche Diskretisierung

Bei den Euler-Gleichungen in der konservativen Form (4.1)

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} = 0 \quad \text{auf } \Omega \quad (5.2)$$

setzt man voraus, daß f , g und w einmal stetig differenzierbar sind. Erfüllen $f(w)$, $g(w)$, w (4.1) bzw. (5.2), so gilt

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \right) dV = 0 . \quad (5.3)$$

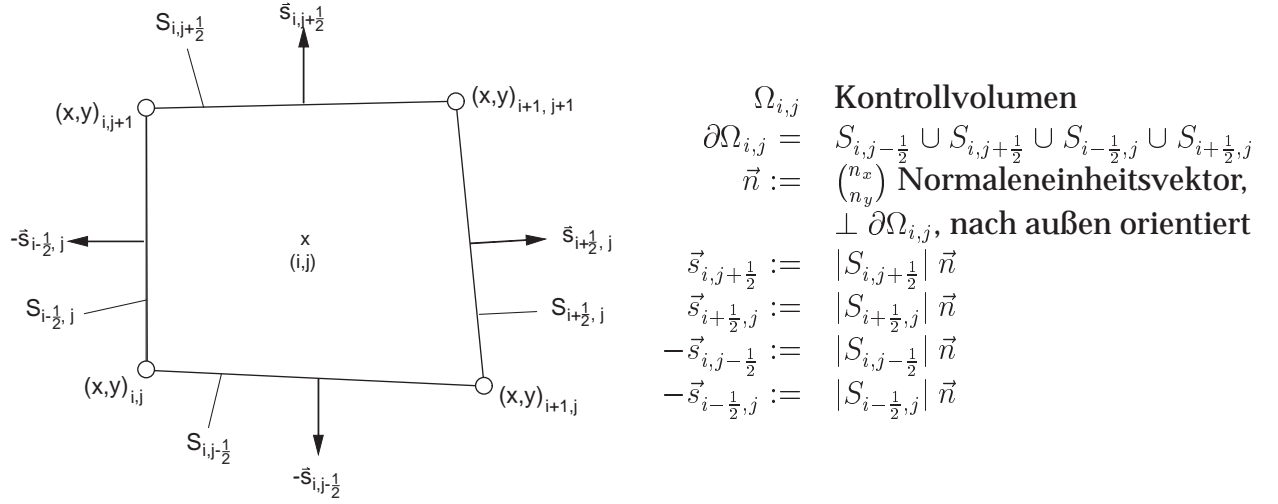


Tabelle 5.1: Begriffserklärungen und Definitionen

Mit dem Gaußschen Integralsatz haben wir schließlich

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \right) dV &= \int_{\Omega} \frac{\partial w}{\partial t} dV + \int_{\Omega} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \right) dV \\ &= \int_{\Omega} \frac{\partial w}{\partial t} dV + \int_{\partial\Omega} (f n_x + g n_y) dS \\ &= \int_{\Omega} \frac{\partial w}{\partial t} dV + \int_{\partial\Omega} F \vec{n} dS = 0, \end{aligned} \quad (5.4)$$

wobei

$$F := (f, g) = \begin{pmatrix} \rho u & \rho v \\ \rho u^2 + p & \rho v u \\ \rho u v & \rho v^2 + p \\ \rho u H & \rho v H \end{pmatrix}. \quad (5.5)$$

Für ein zeitfestes Strömungsgebiet Ω ist (5.4) äquivalent zu

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} w dV + \int_{\partial\Omega} F \vec{n} dS = 0. \quad (5.6)$$

Zerlegt man das Strömungsgebiet Ω in endlich viele zeitfeste Kontrollvolumen $\Omega_{i,j}$, die Finiten Volumes, dann lauten die Euler-Gleichungen in integraler Form für jedes Kontrollvolumen $\Omega_{i,j}$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega_{i,j}} w dV + \int_{\partial\Omega_{i,j}} F \vec{n} dS = 0. \quad (5.7)$$

Die Zellvolumen lassen sich einfach berechnen als

$$|\Omega_{i,j}| = \frac{1}{2} ((x_{i+1,j+1} - x_{i,j})(y_{i,j+1} - y_{i+1,j}) - (y_{i+1,j+1} - y_{i,j})(x_{i,j+1} - x_{i+1,j})). \quad (5.8)$$

Ferner führen wir volumengemittelte Strömungsgrößen

$$w_{i,j} := \frac{1}{|\Omega_{i,j}|} \int_{\Omega_{i,j}} w dV \quad (5.9)$$

ein, die wir jeweils auf den Zellzentren (i, j) annehmen. Man spricht daher auch von der zellzentrierten Finiten Volumenmethode.

Die Flüsse durch die Zellwände $S_{i,j+\frac{1}{2}}$, $S_{i,j-\frac{1}{2}}$, $S_{i+\frac{1}{2},j}$ und $S_{i-\frac{1}{2},j}$ bestimmen wir mit

$$F_{i,j+\frac{1}{2}} := F \left(\frac{1}{2} (w_{i,j} + w_{i,j+1}) \right), \quad F_{i,j-\frac{1}{2}} := F \left(\frac{1}{2} (w_{i,j} + w_{i,j-1}) \right), \quad (5.10)$$

$$F_{i+\frac{1}{2},j} := F \left(\frac{1}{2} (w_{i,j} + w_{i+1,j}) \right), \quad F_{i-\frac{1}{2},j} := F \left(\frac{1}{2} (w_{i,j} + w_{i-1,j}) \right). \quad (5.11)$$

Wir approximieren also den Zellfluß

$$\begin{aligned} Q &:= \int_{\partial\Omega_{i,j}} F \vec{n} dS \\ &= \int_{S_{i,j+\frac{1}{2}}} F \vec{n} dS + \int_{S_{i,j-\frac{1}{2}}} F \vec{n} dS + \int_{S_{i+\frac{1}{2},j}} F \vec{n} dS + \int_{S_{i-\frac{1}{2},j}} F \vec{n} dS \end{aligned} \quad (5.12)$$

durch

$$\begin{aligned} Q_{i,j} &:= \int_{S_{i,j+\frac{1}{2}}} F_{i,j+\frac{1}{2}} \vec{n} dS + \int_{S_{i,j-\frac{1}{2}}} F_{i,j-\frac{1}{2}} \vec{n} dS + \int_{S_{i+\frac{1}{2},j}} F_{i+\frac{1}{2},j} \vec{n} dS + \int_{S_{i-\frac{1}{2},j}} F_{i-\frac{1}{2},j} \vec{n} dS \\ &= |S_{i,j+\frac{1}{2}}| F_{i,j+\frac{1}{2}} \vec{n} + |S_{i,j-\frac{1}{2}}| F_{i,j-\frac{1}{2}} \vec{n} + |S_{i+\frac{1}{2},j}| F_{i+\frac{1}{2},j} \vec{n} + |S_{i-\frac{1}{2},j}| F_{i-\frac{1}{2},j} \vec{n} \\ &= F_{i,j+\frac{1}{2}} \vec{s}_{i,j+\frac{1}{2}} - F_{i,j-\frac{1}{2}} \vec{s}_{i,j-\frac{1}{2}} + F_{i+\frac{1}{2},j} \vec{s}_{i+\frac{1}{2},j} - F_{i-\frac{1}{2},j} \vec{s}_{i-\frac{1}{2},j}. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Insgesamt haben wir dann

$$\frac{\partial}{\partial t} w_{i,j} + \frac{1}{|\Omega_{i,j}|} Q_{i,j} = 0 \quad (5.14)$$

als räumliche Diskretisierung von (5.7).

Die zeitliche Diskretisierung

$$\frac{w_{i,j}^{(n)} - w_{i,j}^{(n+1)}}{\Delta t} = - \frac{1}{|\Omega_{i,j}|} Q_{i,j}^{(n)} \quad (5.15)$$

von (5.14) liefert beispielsweise ein explizites Euler-Zeitschrittverfahren

$$w_{i,j}^{(n+1)} = w_{i,j}^{(n)} + \Delta t \frac{1}{|\Omega_{i,j}|} Q_{i,j}^{(n)}. \quad (5.16)$$

Es lassen sich leicht mehrstufige Runge-Kutta-Zeitschrittverfahren höherer Ordnung implementieren. Dies ist ein Grund, warum auch für stationäre Strömungen die instationären Euler-Gleichungen zur Berechnung herangezogen werden. In der Praxis, so auch in FLOWer, benutzt man auch mehrstufige Verfahren mit optimierten Fehlerdämpfungseigenschaften (siehe [vLTP89]).

Als Startwerte $w_{i,j}^{(0)}$ werden einfach die Werte der freien Anströmung gesetzt, die beispielsweise als Randbedingung für das Fernfeld festgehalten werden können. An der Profilwand hat man ferner die Euler-Schlupfbedingung

$$n_x u + n_y v \stackrel{!}{=} 0 \quad (5.17)$$

zu erfüllen. Konvergiert dieses Verfahren, so muß das Residuum

$$\|w_{i,j}^{(n+1)} - w_{i,j}^{(n)}\| \quad (5.18)$$

für jedes Kontrollvolumen verschwinden.

5.1.2 Ordnung der räumlichen Diskretisierung

Für ein kartesisches Rechnetz mit konstanten Maschenweiten Δx und Δy gilt für den Zellfluß $Q_{i,j}$:

$$\begin{aligned} Q_{i,j} &= F\left(\frac{1}{2}(w_{i,j+1} + w_{i,j})\right) \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta x \end{pmatrix} - F\left(\frac{1}{2}(w_{i,j} + w_{i,j-1})\right) \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta x \end{pmatrix} \\ &\quad + F\left(\frac{1}{2}(w_{i+1,j} + w_{i,j})\right) \begin{pmatrix} \Delta y \\ 0 \end{pmatrix} - F\left(\frac{1}{2}(w_{i,j} + w_{i-1,j})\right) \begin{pmatrix} \Delta y \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}((\rho v)_{i,j+1} - (\rho v)_{i,j-1}) \Delta x + \frac{1}{2}((\rho u)_{i+1,j} - (\rho u)_{i-1,j}) \Delta y \\ \vdots \\ \frac{1}{2}((\rho v H)_{i,j+1} - (\rho v H)_{i,j-1}) \Delta x + \frac{1}{2}((\rho u H)_{i+1,j} - (\rho u H)_{i-1,j}) \Delta y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Hier ist $\Omega_{i,j} = \Delta x \cdot \Delta y$ und somit gilt:

$$\frac{1}{\Omega_{i,j}} Q_{i,j} = \begin{pmatrix} \frac{(\rho v)_{i,j+1} - (\rho v)_{i,j-1}}{2\Delta y} + \frac{(\rho u)_{i+1,j} - (\rho u)_{i-1,j}}{2\Delta x} \\ \vdots \\ \frac{(\rho v H)_{i,j+1} - (\rho v H)_{i,j-1}}{2\Delta y} + \frac{(\rho u H)_{i+1,j} - (\rho u H)_{i-1,j}}{2\Delta x} \end{pmatrix}. \quad (5.19)$$

Für ein kartesisches Rechnetz mit konstanten Maschenweiten entspricht die Finite Volumenmethode also einem zentralen Differenzenschema 2. Ordnung.

Für das zentrale Differenzenschema ist ferner bekannt, daß für Netze mit größeren Änderungen in den Maschenweiten die Genauigkeit bis auf 1. Ordnung heruntergehen kann [Hof82].

Benutzt man also für die Finite Volumenmethode körperangepaßte Netze, so ist darauf zu achten, daß diese möglichst glatt sind, um eine möglichst hohe Genauigkeit zwischen 1. und 2. Ordnung zu erzielen.

5.1.3 Stabilitätsanalyse

Zur Stabilitätsanalyse betrachte man das folgende Modellproblem

$$u_t + u_x + \underbrace{\mu(\Delta x)^3 u_{xxxx}}_{\text{Dissipation } 3. \text{ Ord.}} = 0 \quad (5.20)$$

mit folgender räumlicher Diskretisierung

$$\frac{d}{dt} u_j + P_j = 0, \quad (5.21)$$

wobei

$$\Delta t \cdot P_j = \frac{\lambda}{2} (u_{j+1} - u_{j-1}) + \lambda \mu (u_{j+2} - 4u_{j+1} + 6u_j - 4u_{j-1} + u_{j-2}) \quad (5.22)$$

mit der Courant-Zahl $\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x}$.

Für eine von Neumann Stabilitätsanalyse setze

$$u_j := \sum_k \hat{u}_k e^{ip_k(j \cdot \Delta x)} \quad (5.23)$$

als eine endliche Fourierreihe an, die eine Störung repräsentiere. Die Anzahl der Summanden sei dabei gleich der Anzahl der Gitterpunkte und p_k die Wellenzahl. Untersucht wird nun das Störungszuwachsverhalten für oben genannte Diskretisierung. Dabei ziehe man sich auf eine l -te Fouriermode $\hat{u}e^{ip_l(j \cdot \Delta x)}$ zurück, da der Gesamteffekt dann per Superposition gegeben werden kann. Definiere $\xi := p_l \cdot \Delta x$, $-\pi \leq \xi \leq \pi$.

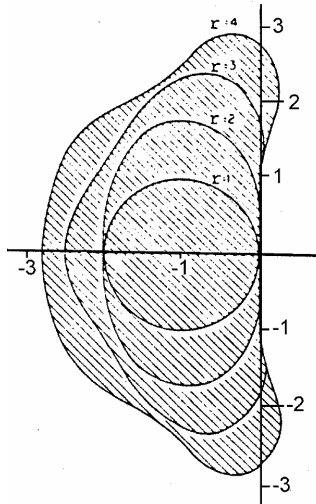


Abbildung 5.1: Stabilitätsgebiete der r -stufigen Runge-Kutta-Verfahren r -ter Ordnung für $r = 1, 2, 3, 4$.

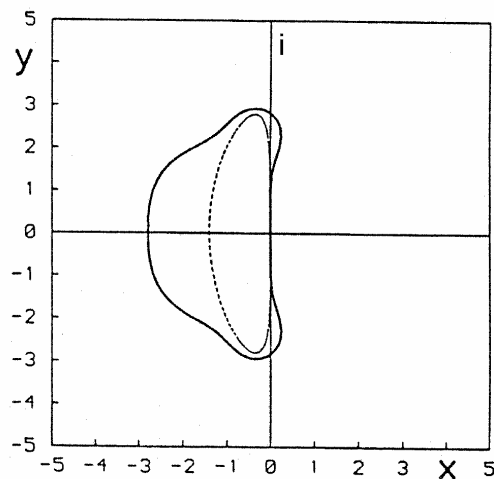


Abbildung 5.2: Stabilitätsgebiet der 4-stufigen Runge-Kutta-Verfahren 4. Ordnung und Lage von $z_f(\xi)$ für $\lambda = 2.8$ und $\mu = \frac{1}{32}$.

Einsetzen der l -ten Fouriermode in (5.21) liefert dann:

$$\begin{aligned}
 \Delta t \frac{d}{dt} (\hat{u} e^{ij\xi}) &= -\Delta t \cdot P(\hat{u} e^{ij\xi}) \\
 &= -\frac{\lambda}{2} \hat{u} (e^{i(j+1)\xi} - e^{i(j-1)\xi}) \\
 &\quad -\lambda \mu \hat{u} (e^{i(j+2)\xi} - 4e^{i(j+1)\xi} + 6e^{ij\xi} - 4e^{i(j-1)\xi} + e^{i(j-2)\xi}) \\
 &=: z_f \cdot \hat{u} e^{ij\xi}.
 \end{aligned} \tag{5.24}$$

z_f heißt Fourier-Symbol und mit Gleichung (5.24) folgt

$$z_f = -\lambda(4\mu(1 - \cos \xi)^2 + i \sin \xi). \tag{5.25}$$

Der Zuwachs der Amplitude der l -ten Fouriermode wird gerade beschrieben durch:

$$\Delta t \frac{d\hat{u}}{dt} = z_f \hat{u}. \tag{5.26}$$

Für einen Schritt eines Euler-Zeitschrittverfahrens gilt also:

$$\hat{u}^{(n+1)} = \hat{u}^{(n)} + \Delta t \frac{d\hat{u}^{(n)}}{dt} = \hat{u}^{(n)} + z_f \hat{u}^{(n)} = (1 + z_f) \hat{u}^{(n)} =: g(z_f) \hat{u}^{(n)}. \tag{5.27}$$

$g(z_f)$ heißt Amplifikationsfaktor und ist der Störungszuwachsfaktor des Zeitschrittverfahrens. In naheliegender Weise definiert nun

$$H := \{z \in \mathbb{C} : |g(z)| \leq 1\} \tag{5.28}$$

das Stabilitätsgebiet. Das Stabilitätsgebiet hängt nur von dem verwendeten Zeitschrittverfahren ab.

Die Amplifikationsfaktoren aller r -stufigen Verfahren der Ordnung $r = 1, 2, 3, 4$ sind gegeben als (siehe [KJ87]):

$$g(z) = \sum_{m=0}^r \frac{z^m}{m!}. \tag{5.29}$$

Eine Zeitintegration von (5.21) mit einem r -stufigen Runge-Kutta-Verfahren r -ter Ordnung erfordert nun, daß das Fourier-Symbol $z_f = z_f(\xi)$ für alle $-\pi \leq \xi \leq \pi$ im Stabilitätsgebiet der r -stufigen Runge-Kutta-Verfahren r -ter Ordnung liegt (siehe Abbildung 5.1).

Ohne numerische Dissipation 3. Ordnung ($\mu = 0$) ist das Fourier-Symbol rein imaginär. Der Durchschnitt für das Stabilitätsgebiet mit der imaginären Achse liefert dabei die maximale Courant-Zahl λ . Wie man in Abbildung 5.1 sehen kann, sind dann Zeitschrittverfahren 1. und 2. Ordnung nicht stabil und die maximalen Courant-Zahlen für Zeitschrittverfahren 3. und 4. Ordnung sind dann 1.72 bzw. $2\sqrt{2}$.

Führt man hingegen numerische Dissipation 3. Ordnung ein, so läßt sich die Stabilität gewährleisten und wie in Abbildung 5.2 gezeigt, das Stabilitätsgebiet erheblich vergrößern.

5.1.4 Numerische Dissipation

Wie im vorigen Abschnitt gesehen, benötigt man Terme numerischer Dissipation 3. Ordnung, um die Stabilität des expliziten Schemas zu gewährleisten.

Es hat sich herausgestellt, daß das Mischen dissipativer Terme 1. und 3. Ordnung erforderlich ist (siehe [JST81]). Godunov hat beispielsweise gezeigt, daß an Stößen (Sprünge in p) das numerische Verfahren von 1. Ordnung sein muß (siehe hierzu [God59]).

(zugehöriges Modellproblem: $u_t + u_x + \tau(\Delta x)u_{xx} + \mu(\Delta x)^3 u_{xxx}$)

Die numerische Dissipation wird in folgender Weise eingebracht:

$$\frac{\partial}{\partial t} w_{i,j} + \frac{1}{|\Omega_{i,j}|} Q_{i,j} - \frac{1}{|\Omega_{i,j}|} D_{i,j} = 0, \quad (5.30)$$

wobei $D_{i,j}$ der wie folgt definierte Dissipationsoperator ist:

$$D_{i,j} = d_{i+\frac{1}{2},j} - d_{i-\frac{1}{2},j} + d_{i,j+\frac{1}{2}} - d_{i,j-\frac{1}{2}} \quad (5.31)$$

Dabei ist beispielsweise der dissipative Fluß $d_{i+\frac{1}{2},j}$ gegeben als:

$$d_{i+\frac{1}{2},j} = \alpha_{i+\frac{1}{2},j} \left(\epsilon_{i+\frac{1}{2},j}^{(2)} (w_{i+1,j} - w_{i,j}) - \epsilon_{i+\frac{1}{2},j}^{(4)} (w_{i+2,j} - 3w_{i+1,j} + 3w_{i,j} - w_{i-1,j}) \right). \quad (5.32)$$

$\epsilon_{i+\frac{1}{2},j}^{(2)}$ und $\epsilon_{i+\frac{1}{2},j}^{(4)}$ sind adaptive Koeffizienten, um genügend Dissipation 1. bzw. 3. Ordnung anzuschalten, wo sie benötigt werden. Hierbei sorgt der Faktor $\alpha_{i+\frac{1}{2},j}$ für die richtige Gewichtung. Es sind definiert:

$$\epsilon_{i+\frac{1}{2},j}^{(2)} := k^{(2)} \max\{\nu_{i+2,j}, \nu_{i+1,j}, \nu_{i,j}, \nu_{i-1,j}\}, \quad (5.33)$$

$$\epsilon_{i+\frac{1}{2},j}^{(4)} := \max\{0, k^{(4)} - \epsilon_{i+\frac{1}{2},j}^{(2)}\}, \quad (5.34)$$

wobei

$$\nu_{i,j} := \frac{|p_{i+1,j} - 2p_{i,j} + p_{i-1,j}|}{|p_{i+1,j} + 2p_{i,j} + p_{i-1,j}|} \quad (5.35)$$

und $k^{(2)}$ und $k^{(4)}$ konstant seien. Weiter ist definiert

$$\alpha_{i+\frac{1}{2},j} := \frac{1}{2} \left(\frac{|\Omega_{i,j}|}{\Delta t_{i,j}^*} + \frac{|\Omega_{i+1,j}|}{\Delta t_{i+1,j}^*} \right), \quad (5.36)$$

mit $\Delta t_{i,j}^*$ als Schätzung des maximalen Zeitschrittes an der Stelle (i, j) für eine Courant-Zahl von 1.

$\nu_{i,j}$ ist der sogenannte Drucklimiter. Wie man sieht, werden durch $\nu_{i,j}$ in glatten Druckbereichen dissipative Terme 3. Ordnung und an Stößen dissipative Terme 1. Ordnung gesetzt.

5.2 Finite Volumenmethode zur Lösung der adjungierten Euler-Gleichungen

5.2.1 Räumliche und zeitliche Diskretisierung

Im folgenden wird nun die räumliche Diskretisierung der adjungierten Euler-Gleichungen sowie die effiziente Auswertung der adjungierten Flüsse beschrieben.

Die Notation ist hier konsistent zu den Begriffserklärungen und Definitionen aus Tabelle 5.1 des Abschnittes 5.1.1. Die adjungierten Euler-Gleichungen werden nun zur gleichen Zerlegung des Strömungsgebietes Ω , also auf dem gleichen Rechnetz, wie für die numerische Lösung der primalen Euler-Gleichungen verwendet, diskretisiert. Die adjungierten quasi-instationären Euler-Gleichungen lauten dann in integraler Form für die Zerlegung des zeitfesten Strömungsgebietes Ω in eben diese zeitfesten Kontrollvolumen $\Omega_{i,j}$

$$\begin{aligned}
 0 &= \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} + \left(\frac{\partial f}{\partial w} \right)^{\top} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \left(\frac{\partial g}{\partial w} \right)^{\top} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) dV \\
 &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \psi dV + \int_{\Omega} \left(\left(\frac{\partial f}{\partial w} \right)^{\top} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \left(\frac{\partial g}{\partial w} \right)^{\top} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) dV \\
 &= \sum_{i,j} \left[\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega_{i,j}} \psi dV + \int_{\Omega_{i,j}} \left(\left(\frac{\partial f}{\partial w} \right)^{\top} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \left(\frac{\partial g}{\partial w} \right)^{\top} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) dV \right]. \quad (5.37)
 \end{aligned}$$

Es ist ferner

$$\begin{aligned}
 0 &= \sum_{i,j} \left[\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega_{i,j}} \psi dV + \int_{\Omega_{i,j}} \left(\left(\frac{\partial f}{\partial w} \right)^{\top} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \left(\frac{\partial g}{\partial w} \right)^{\top} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) dV \right] \\
 \Leftrightarrow 0 &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega_{i,j}} \psi dV + \int_{\Omega_{i,j}} \left(\left(\frac{\partial f}{\partial w} \right)^{\top} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \left(\frac{\partial g}{\partial w} \right)^{\top} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) dV \quad \forall i, j. \quad (5.38)
 \end{aligned}$$

Approximiert man nun die Lösung w der stationären Euler-Gleichungen durch die numerische Lösung $w_{i,j}$ auf demselben Netz eines vorherigen Finite-Volumen-Laufes zwecks Lösung der stationären Euler-Gleichungen, so erhält man

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega_{i,j}} \psi dV + \int_{\Omega_{i,j}} \left(\left(\frac{\partial f(w_{i,j})}{\partial w} \right)^{\top} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \left(\frac{\partial g(w_{i,j})}{\partial w} \right)^{\top} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) dV \\
 &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega_{i,j}} \psi dV + \int_{\Omega_{i,j}} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{\partial f(w_{i,j})}{\partial w} \right)^{\top} \psi \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\frac{\partial g(w_{i,j})}{\partial w} \right)^{\top} \psi \right] \right) dV \quad \forall i, j. \quad (5.39)
 \end{aligned}$$

Mit dem Gaußschen Integralsatz erhält man dann schließlich

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega_{i,j}} \psi dV + \int_{\partial \Omega_{i,j}} F^{(i,j)} \vec{n} ds = 0, \quad (5.40)$$

wobei

$$F^{(i,j)} = \left[\left(\frac{\partial f(w_{i,j})}{\partial w} \right)^\top \psi, \left(\frac{\partial g(w_{i,j})}{\partial w} \right)^\top \psi \right] \quad \forall i, j. \quad (5.41)$$

Die Zellvolumen $|\Omega_{i,j}|$ sind bereits aus dem primalen Euler-Lauf bekannt und wir führen nun analog volumengemittelte adjungierte Strömungsgrößen

$$\psi_{i,j} := \frac{1}{|\Omega_{i,j}|} \int_{\Omega_{i,j}} \psi \, dV \quad (5.42)$$

ein, die wir wieder auf den Zellzentren (i, j) annehmen.

Die Flüsse durch die Zellwände $S_{i,j+\frac{1}{2}}$, $S_{i,j-\frac{1}{2}}$, $S_{i+\frac{1}{2},j}$ und $S_{i-\frac{1}{2},j}$ bestimmen wir mit

$$F^{(i,j)}_{i,j+\frac{1}{2}} := F^{(i,j)} \left(\frac{1}{2} (\psi_{i,j} + \psi_{i,j+1}) \right), \quad F^{(i,j)}_{i,j-\frac{1}{2}} := F^{(i,j)} \left(\frac{1}{2} (\psi_{i,j} + \psi_{i,j-1}) \right), \quad (5.43)$$

$$F^{(i,j)}_{i+\frac{1}{2},j} := F^{(i,j)} \left(\frac{1}{2} (\psi_{i,j} + \psi_{i+1,j}) \right), \quad F^{(i,j)}_{i-\frac{1}{2},j} := F^{(i,j)} \left(\frac{1}{2} (\psi_{i,j} + \psi_{i-1,j}) \right). \quad (5.44)$$

Wir approximieren also den Zellfluß

$$\begin{aligned} Q &:= \int_{\partial\Omega_{i,j}} F^{(i,j)} \vec{n} \, dS \\ &= \int_{S_{i,j+\frac{1}{2}}} F^{(i,j)} \vec{n} \, dS + \int_{S_{i,j-\frac{1}{2}}} F^{(i,j)} \vec{n} \, dS + \\ &\quad \int_{S_{i+\frac{1}{2},j}} F^{(i,j)} \vec{n} \, dS + \int_{S_{i-\frac{1}{2},j}} F^{(i,j)} \vec{n} \, dS \end{aligned} \quad (5.45)$$

durch

$$\begin{aligned} Q_{i,j} &:= \int_{S_{i,j+\frac{1}{2}}} F^{(i,j)}_{i,j+\frac{1}{2}} \vec{n} \, dS + \int_{S_{i,j-\frac{1}{2}}} F^{(i,j)}_{i,j-\frac{1}{2}} \vec{n} \, dS + \\ &\quad \int_{S_{i+\frac{1}{2},j}} F^{(i,j)}_{i+\frac{1}{2},j} \vec{n} \, dS + \int_{S_{i-\frac{1}{2},j}} F^{(i,j)}_{i-\frac{1}{2},j} \vec{n} \, dS \\ &= |S_{i,j+\frac{1}{2}}| F^{(i,j)}_{i,j+\frac{1}{2}} \vec{n} + |S_{i,j-\frac{1}{2}}| F^{(i,j)}_{i,j-\frac{1}{2}} \vec{n} + \\ &\quad |S_{i+\frac{1}{2},j}| F^{(i,j)}_{i+\frac{1}{2},j} \vec{n} + |S_{i-\frac{1}{2},j}| F^{(i,j)}_{i-\frac{1}{2},j} \vec{n} \\ &= F^{(i,j)}_{i,j+\frac{1}{2}} \vec{s}_{i,j+\frac{1}{2}} - F^{(i,j)}_{i,j-\frac{1}{2}} \vec{s}_{i,j-\frac{1}{2}} + \\ &\quad F^{(i,j)}_{i+\frac{1}{2},j} \vec{s}_{i+\frac{1}{2},j} - F^{(i,j)}_{i-\frac{1}{2},j} \vec{s}_{i-\frac{1}{2},j}. \end{aligned} \quad (5.46)$$

Insgesamt haben wir dann

$$\frac{\partial}{\partial t} \psi_{i,j} + \frac{1}{|\Omega_{i,j}|} Q_{i,j} = 0 \quad (5.47)$$

als räumliche Diskretisierung.

Zur Auswertung der adjungierten Flüsse nach (5.46) sind hier allerdings jeweils acht aufwendige Auswertungen der Jacobi-Matrizen erforderlich. Im folgenden wird gezeigt, wie die Auswertung der adjungierten Flüsse effizient vorgenommen werden kann.

Unter der Voraussetzung, daß das Rechnetz hinreichend glatt ist, mitteln wir die Zellseitennormalen \vec{s} wie folgt:

$$\begin{pmatrix} \bar{s}_x^{(j)} \\ \bar{s}_y^{(j)} \end{pmatrix} := \frac{1}{2} \left(\vec{s}_{i,j+\frac{1}{2}} + \vec{s}_{i,j-\frac{1}{2}} \right), \quad \begin{pmatrix} \bar{s}_x^{(i)} \\ \bar{s}_y^{(i)} \end{pmatrix} := \frac{1}{2} \left(\vec{s}_{i+\frac{1}{2},j} + \vec{s}_{i-\frac{1}{2},j} \right). \quad (5.48)$$

Setzt man diese gemittelten Zellseitennormalen in (5.46) ein, so erhält man

$$\begin{aligned} Q_{i,j} \approx \tilde{Q}_{i,j} &= \left[\bar{s}_x^{(j)} \left(\frac{\partial f(w_{i,j})}{\partial w} \right)^\top + \bar{s}_y^{(j)} \left(\frac{\partial g(w_{i,j})}{\partial w} \right)^\top \right] \frac{1}{2} (\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j-1}) + \\ &\quad \left[\bar{s}_x^{(i)} \left(\frac{\partial f(w_{i,j})}{\partial w} \right)^\top + \bar{s}_y^{(i)} \left(\frac{\partial g(w_{i,j})}{\partial w} \right)^\top \right] \frac{1}{2} (\psi_{i+1,j} - \psi_{i-1,j}), \end{aligned} \quad (5.49)$$

als Approximation von $Q_{i,j}$.

Führt man nun ferner die Transformationen

$$\tilde{Q}_{i,j}^{(j)} = T \left[\bar{s}_x^{(j)} \left(\frac{\partial f(w_{i,j})}{\partial w} \right)^\top + \bar{s}_y^{(j)} \left(\frac{\partial g(w_{i,j})}{\partial w} \right)^\top \right] T^{-1}, \quad (5.50)$$

$$\tilde{Q}_{i,j}^{(i)} = T \left[\bar{s}_x^{(i)} \left(\frac{\partial f(w_{i,j})}{\partial w} \right)^\top + \bar{s}_y^{(i)} \left(\frac{\partial g(w_{i,j})}{\partial w} \right)^\top \right] T^{-1}, \quad (5.51)$$

und

$$\tilde{\psi}_{i,j}^{(j)} = T \frac{1}{2} (\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j-1}), \quad \tilde{\psi}_{i,j}^{(i)} = T \frac{1}{2} (\psi_{i+1,j} - \psi_{i-1,j}), \quad (5.52)$$

mit

$$T = \begin{pmatrix} 1 & u & v & \frac{1}{2}(u^2 + v^2) \\ 0 & 1 & 0 & u \\ 0 & 0 & 1 & v \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -u & -v & \frac{1}{2}(u^2 + v^2) \\ 0 & 1 & 0 & -u \\ 0 & 0 & 1 & -v \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.53)$$

durch, so gilt

$$\tilde{Q}_{i,j} = T^{-1} \tilde{Q}_{i,j}^{(j)} \tilde{\psi}_{i,j}^{(j)} + T^{-1} \tilde{Q}_{i,j}^{(i)} \tilde{\psi}_{i,j}^{(i)}. \quad (5.54)$$

Dabei handelt es sich um einen Spezialfall der Transformation auf primitive Variablen ($T = M^\top$ für M aus (4.97) mit $\rho := 1$, $\gamma := 2$) und es ist

$$\tilde{Q}_{i,j}^{(l)} = \begin{pmatrix} u\bar{s}_x^{(l)} + v\bar{s}_y^{(l)} & 0 & 0 & 0 \\ \bar{s}_x^{(l)} & u\bar{s}_x^{(l)} + v\bar{s}_y^{(l)} & 0 & \frac{\gamma-1}{\rho} \bar{s}_x^{(l)} \\ \bar{s}_y^{(l)} & 0 & u\bar{s}_x^{(l)} + v\bar{s}_y^{(l)} & \frac{\gamma-1}{\rho} \bar{s}_y^{(l)} \\ 0 & (\gamma-1)\bar{s}_x^{(l)} & (\gamma-1)\bar{s}_y^{(l)} & u\bar{s}_x^{(l)} + v\bar{s}_y^{(l)} \end{pmatrix} \quad \text{für } l \in \{i, j\}. \quad (5.55)$$

Die Matrizen $\tilde{Q}_{i,j}^{(l)}$ sind leicht auszuwerten und die Anzahl der Matrix-Auswertungen reduziert sich von acht auf nur zwei Auswertungen.

Die zeitliche Diskretisierung erfolgt wieder, wie schon im primalen Euler-Falle in Abschnitt 5.1.1 beschrieben, nach beliebigen Runge-Kutta Zeitschrittableaus.

5.2.2 Ordnung, Stabilität und numerische Dissipation

Für die Gewichtung der Dissipation sowie für die Berechnung der Zeitschrittweiten werden in FLOWer die Spektralradien der Jacobi-Matrizen errechnet. Das Transponieren der Jacobi-Matrizen hat hier keinen Effekt, so daß für die Zeitschritt- und Dissipationsroutinen in der Adjungierten-Version FLOWer ADJOINT keine Änderungen vorgenommen werden müssen. Die numerische Dissipation wird genau so, wie im vorherigen Abschnitt 5.1.4 beschrieben, eingebracht.

Für die Ordnung der räumlichen Diskretisierung sowie die Stabilität des Verfahrens ändert sich für die numerische Behandlung der adjungierten Euler-Gleichungen nichts. Die Modellgleichung für die Untersuchung der Stabilität wäre bis auf die Vorzeichen die Gleiche.

6 Validierung und Einsatz von FLOWer ADJOINT in der aerodynamischen Formoptimierung

Als einen ersten Testfall zur Validierung von FLOWer ADJOINT betrachten wir die Widerstandsreduktion für das transsonische RAE2822-Profil, bei einer Mach-Zahl von $Ma = 0.73$ und einem Anstellwinkel von $\alpha = 2^\circ$. Für diesen Testfall können Vergleichsrechnungen mit dem Adjungiertenverfahren flo87s von A. Jameson vorgenommen werden [Gau01]. Zu der Geometrie des RAE2822-Profiles wird das Netz, welches anfangs beim Lauf von flo87s durch Shared Parabolic Mappings erzeugt wird, herausgeschrieben und ins FLOWer-Format transformiert sowie in z -Richtung zu einem periodisch gestaffelten Quasi-2D-Netz erweitert. Dies ist für 2D-Geometrien deshalb notwendig, da der Adjungierten-Löser für die aerodynamische Formoptimierung aus Robustheitsgründen gerade für die zellzentrierte Metrik in FLOWer implementiert wurde und FLOWer bisher in der zellzentrierten Metrik lediglich eine 3D-Option besitzt.

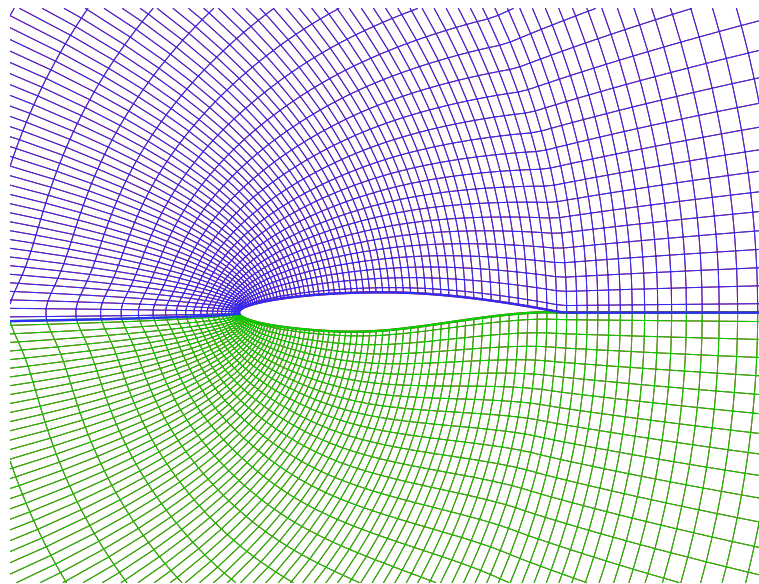


Abbildung 6.1: In z -Richtung periodisch gestaffeltes 2-Block-Netz des RAE2822-Profiles.

Die Robustheit des (adjungierten) Strömungslösers ist in einer mehrmals zu durchlaufenden Optimierungsschleife aber eine Unabdingbarkeit. Gerade bei Mehrblockto-

pologien erweist sich die zellzentrierte Metrik als robuster, da hier im Gegensatz zur Zelleckpunktmetrik Singularitäten an topologischen Blockgrenzen vermieden werden. Das so in z-Richtung periodisch gestaffelte Quasi-2D-Netz hat $192 \times 32 \times 2$ Zellen und wird zusätzlich noch entlang der Profilsehne in zwei Blöcke geteilt. Abbildung 6.1 zeigt dieses in z-Richtung periodisch gestaffelte 2-Block-Netz. So kann gleichzeitig für diesen ersten einfachen Testfall die Mehrblockfähigkeit von FLOWer ADJOINT geprüft werden.

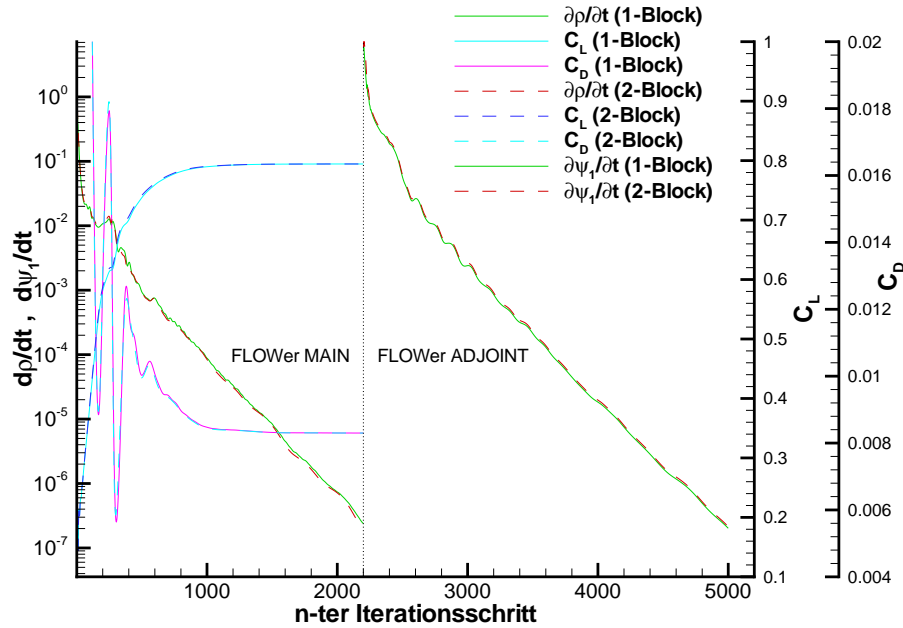


Abbildung 6.2: Konvergenz von FLOWer in MAIN und ADJOINT Option für das RAE2822-Profil für den Widerstandsbeiwert C_D als Zielfunktion bei $Ma = 0.73$ und $\alpha = 2^\circ$.

Wie man Abbildung 6.2 entnehmen kann, konvergiert FLOWer in der MAIN sowie in der ADJOINT Option auf dem 2-Block-Netz genauso gut wie auf dem 1-Block-Netz. Nachdem in der MAIN Option sowohl der Druck- als auch der Auftriebsbeiwert nach ca. 2200 Iterationen zu einer vorgegebenen Toleranz auskonvergiert sind ist das Dichteresiduum bis auf $0.5 \cdot 10^{-7}$ auskonvergiert. Das Restart-File der MAIN Option wird herausgeschrieben und beim erneuten Anstarten von FLOWer in der ADJOINT Option eingelesen. Nun konvergiert FLOWer in der ADJOINT Option für die erste Komponente des Adjungiertenvektors ψ_1 zur gleichen Größenordnung wie das Dichteresiduum des MAIN Laufes.

Die Abbildungen 6.3 und 6.4 zeigen die gute Übereinstimmung der Konturplots von Dichte und erster Adjungiertenvariable, errechnet mit FLOWer in MAIN bzw. ADJOINT Option sowie mit dem Jameson-Code flo87s.

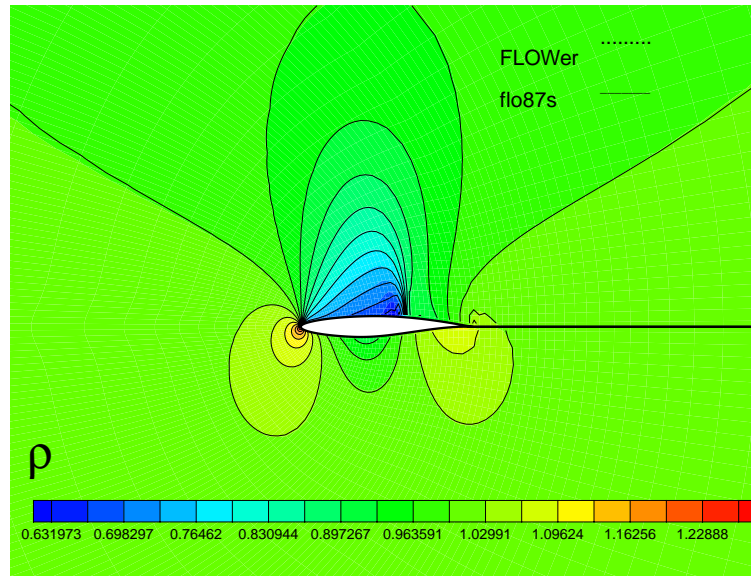


Abbildung 6.3: Konturplot der Dichte ρ , errechnet mit FLOWer in der MAIN Option sowie mit dem Euler-Löser von flo87s, für das RAE2822-Profil bei $Ma = 0.73$ und $\alpha = 2^\circ$.

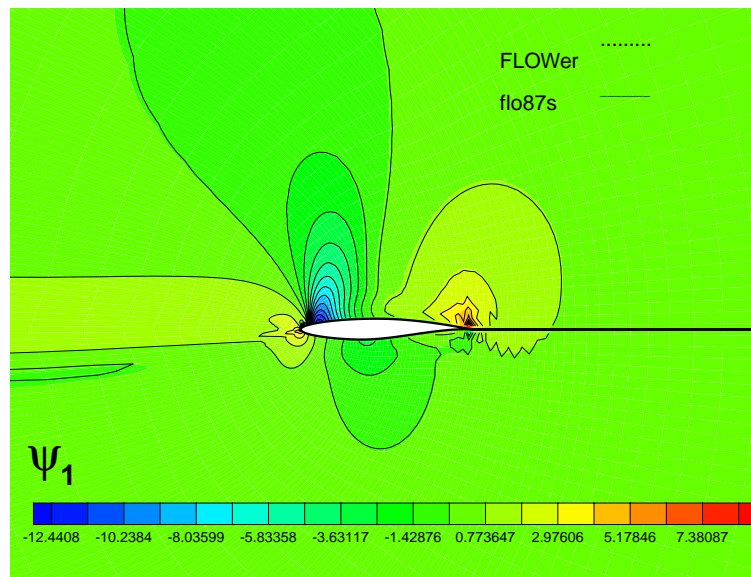


Abbildung 6.4: Konturplot der ersten Komponente des Adjungiertenvektors ψ_1 , errechnet mit FLOWer in der ADJOINT Option sowie mit dem adjungierten Euler-Löser von flo87s, für das RAE2822-Profil für den Widerstandsbeiwert C_D als Zielfunktion bei $Ma = 0.73$ und $\alpha = 2^\circ$.

Unter Verwendung der adjungierten Volumenformulierung (4.72) nach Jameson und Reuther [JR94], zeigt Abbildung 6.5 eine gute Übereinstimmung der Gradienten des Widerstandsbeiwertes C_D , ermittelt durch FLOWer in der MAIN und ADJOINT Option sowie durch das durch Bartelheimer [Bar97] modifizierte Adjungiertenverfahren flo87s für das RAE2822-Profil bei $Ma = 0.73$ und $\alpha = 2^\circ$. Die Profilgeometrie des RAE2822 wird hierbei durch 50 B-Spline-Parameter variabel beschrieben.

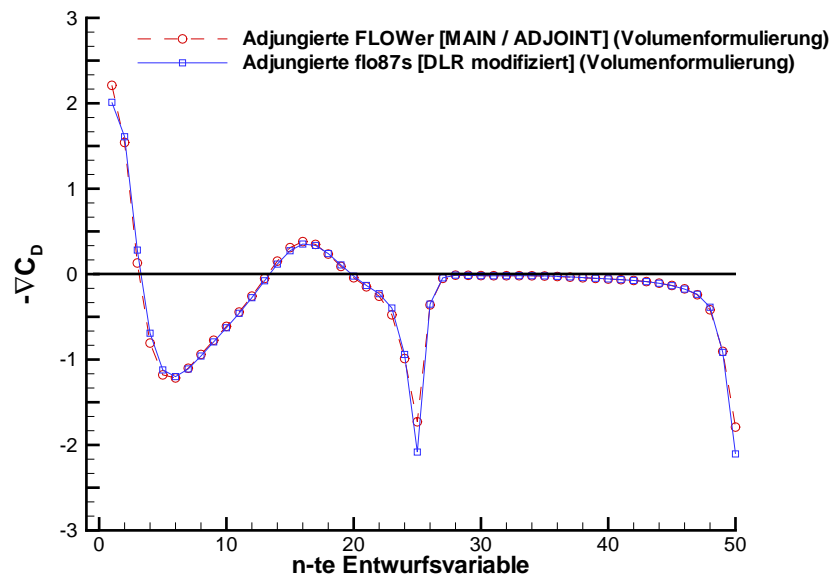


Abbildung 6.5: Adjungierter Widerstandsgradient für das RAE2822-Profil bei $Ma = 0.73$ und $\alpha = 2^\circ$, errechnet mit FLOWer in der MAIN und ADJOINT Option sowie mit flo87s, unter Verwendung der Volumenformulierung. 50 B-Spline-Parameter beschreiben die Profilgeometrie.

Das Jameson-Verfahren flo87s bietet nicht die Möglichkeit, die adjungierten Gradienten zu den Zielfunktionen Auftriebsbeiwert und Nickmoment zu berechnen. Hierfür müssen wir uns zwecks Validierung auf einen Vergleich mit Finiten Differenzen zurückziehen, den wir zusätzlich zu obigem FLOWer/flo87s-Vergleich auch für den Widerstandsbeiwert vornehmen. Die Abbildungen 6.6, 6.7 und 6.8 zeigen die hervorragende Übereinstimmung zwischen den Gradienten von Widerstands-, Auftriebs- und Nickmomentenbeiwert, errechnet mit dem Adjungiertenverfahren FLOWer ADJOINT unter Verwendung der Volumenformulierung (4.72) und Finiten Differenzen (FLOWer nur in der MAIN Option).

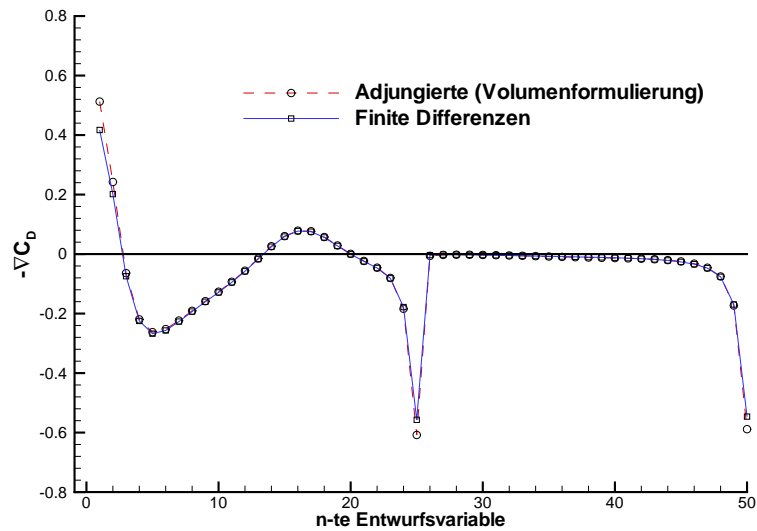


Abbildung 6.6: Widerstandsgradient für das RAE2822-Profil bei $Ma = 0.73$ und $\alpha = 2^\circ$, errechnet mit FLOWer in der MAIN und ADJOINT Option unter Verwendung der Volumenformulierung sowie mit Finiten Differenzen. 50 B-Spline-Parameter beschreiben die Profilgeometrie.

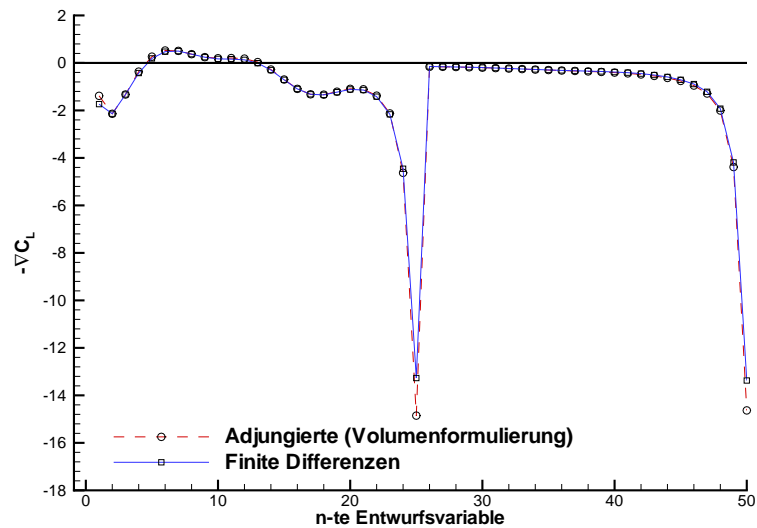


Abbildung 6.7: Auftriebsgradient für das RAE2822-Profil bei $Ma = 0.73$ und $\alpha = 2^\circ$, errechnet mit FLOWer in der MAIN und ADJOINT Option unter Verwendung der Volumenformulierung sowie mit Finiten Differenzen. 50 B-Spline-Parameter beschreiben die Profilgeometrie.

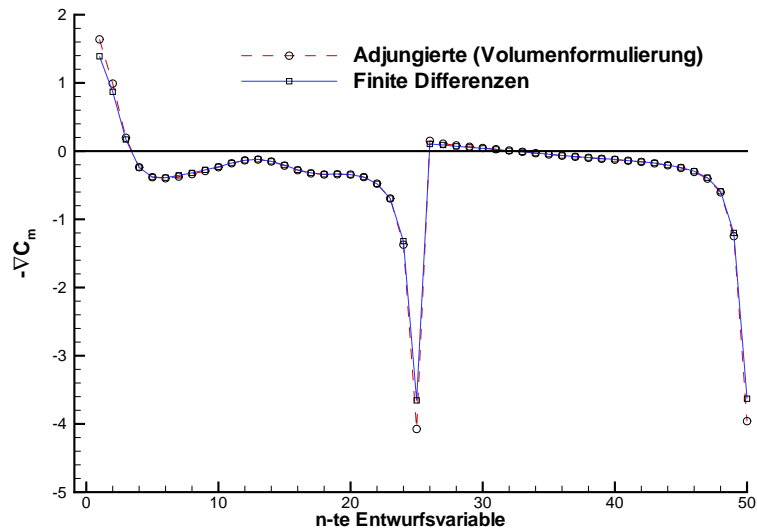


Abbildung 6.8: Gradient des Nickmomentes für das RAE2822-Profil bei $Ma = 0.73$ und $\alpha = 2^\circ$, errechnet mit FLOWer in der MAIN und ADJOINT Option unter Verwendung der Volumenformulierung sowie mit Finiten Differenzen. 50 B-Spline-Parameter beschreiben die Profilgeometrie.

Es sei hier neben der Tatsache, daß der Aufwand für das Errechnen des Gradienten der Finiten Differenzen mit 51 Strömungsrechnungen anstatt lediglich einer Strömungs- und einer adjungierten Strömungsrechnung im Falle des Adjungiertenverfahrens ca. 25 mal höher ist, erwähnt, daß zur Erlangung dieser hervorragenden Übereinstimmung beider Vorgehensweisen die Finiten Differenzen eines aufwendigen Tunings bedürfen. Hier zeigt sich gerade der Vorteil der Exaktheit der adjungierten Gradienten. Für das Errechnen aller dreier Gradienten werden auf der NEC-SX5 510 Minuten benötigt, mit dem Adjungiertenverfahren lediglich 40 Minuten (51x FLOWer MAIN a je 10 Min. = 510 Min. \leftrightarrow 1x FLOWer MAIN + 3x FLOWer ADJOINT a je 10 Min. = 40 Min.). Rechnet man den Aufwand des Tunings im Falle der Finiten Differenzen hinzu, so erhöht sich neben dem Vorteil der Exaktheit auch der Effizienzvorteil mit dem Adjungiertenverfahren. In einer automatisierten Optimierungsschleife kann ferner mit dem Verfahren der Finiten Differenzen die Exaktheit des Gradienten nicht garantiert werden, was zusätzliche Optimierungsschleifen bis zur Konvergenz zum Optimum mit sich bringen kann.

Wir vergleichen ferner die adjungierten Gradienten von Widerstands-, Auftriebs- und Nickmomentenbeiwert, errechnet mit FLOWer in der MAIN und ADJOINT Option unter Verwendung der in Abschnitt 4.5.3 neu entwickelten Oberflächenformulierung (4.219) sowie der Volumenformulierung (4.72), zwecks Validierung gerade der Oberflächenformulierung (4.219). Die Abbildungen 6.9, 6.10 und 6.11 zeigen eine gute Übereinstimmung beider Formulierungen.

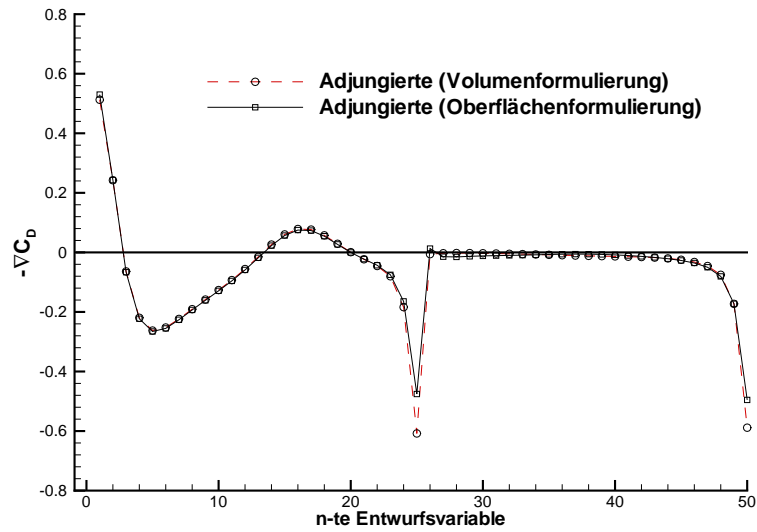


Abbildung 6.9: Widerstandsgradient für das RAE2822-Profil bei $Ma = 0.73$ und $\alpha = 2^\circ$, errechnet mit FLOWer in der MAIN und ADJOINT Option unter Verwendung der Volumenformulierung sowie der Oberflächenformulierung. 50 B-Spline-Parameter beschreiben die Profilgeometrie.

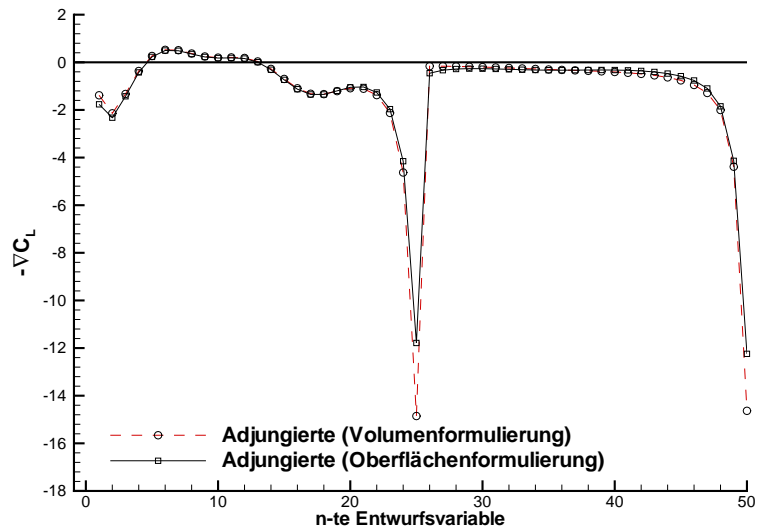


Abbildung 6.10: Auftriebsgradient für das RAE2822-Profil bei $Ma = 0.73$ und $\alpha = 2^\circ$, errechnet mit FLOWer in der MAIN und ADJOINT Option unter Verwendung der Volumenformulierung sowie der Oberflächenformulierung. 50 B-Spline-Parameter beschreiben die Profilgeometrie.

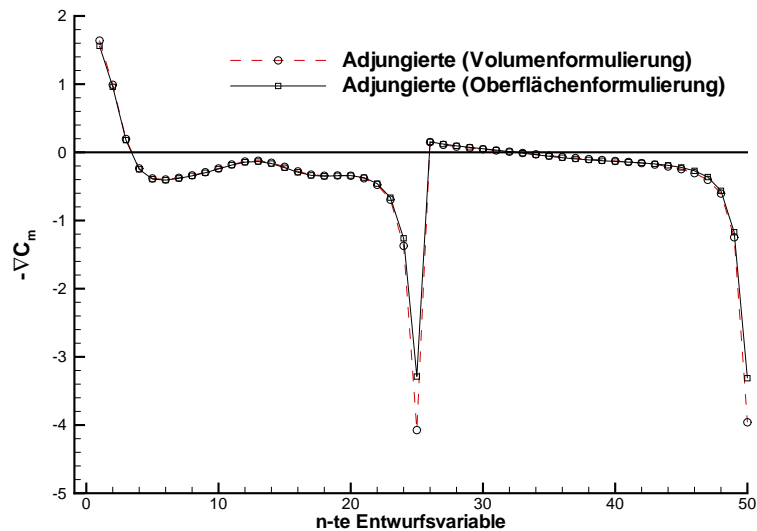


Abbildung 6.11: Gradient des Nickmomentes für das RAE2822-Profil bei $Ma = 0.73$ und $\alpha = 2^\circ$, errechnet mit FLOWer in der MAIN und ADJOINT Option unter Verwendung der Volumenformulierung sowie der Oberflächenformulierung. 50 B-Spline-Parameter beschreiben die Profilgeometrie.

Die Oberflächenformulierung (4.219) ermöglicht nun die Handhabung komplexer 3D-Mehrblocktopologien. Wäre man bei komplexen 3D-Mehrblocktopologien auf die Gitterverschiebetechnik der Volumenformulierung angewiesen, so wäre man genötigt eine große Anzahl von Sonderbehandlungen, beispielsweise zur Vermeidung von Überschneidungen bei der Verschiebung über Blockgrenzen hinweg, zu implementieren. Natürlich ist die Oberflächenformulierung auch numerisch effizienter.

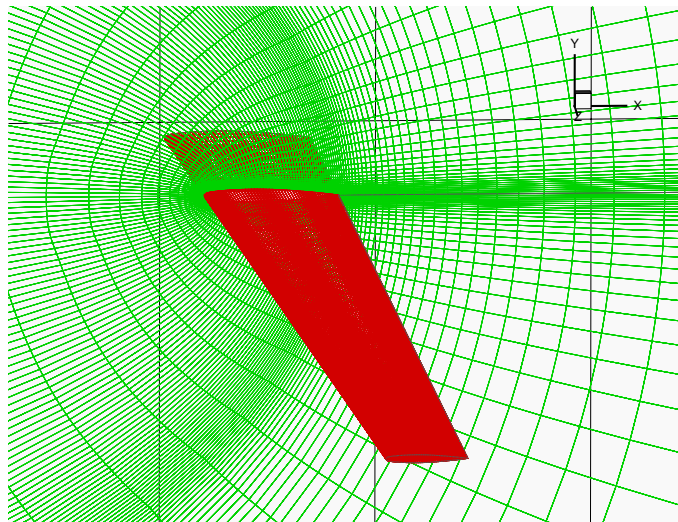


Abbildung 6.12: Netz vom C-Typ mit $128 \times 32 \times 48$ Zellen um den ONERA-M6-Flügel.

Motiviert durch die Resultate für den Quasi-2D-Fall des RAE2822-Profiles nehmen wir uns nun einen ersten einfachen 3D-Fall vor. Hierfür wählen wir den ONERA-M6-

Flügel [GB02b]. Der ONERA-M6-Flügel und ein Teil des ihn umgebenden Netzes vom C-Typ mit $128 \times 32 \times 48$ Zellen sind in Abbildung 6.12 zu sehen. Dabei bilden 32 Profilschnitte den Flügel in z-Richtung.

Für einen geforderten Auftrieb von $C_L^t = 0.3$ bei einer Machzahl von $Ma = 0.84$ ermittelt FLOWer in der MAIN Option einen Anstellwinkel von $\alpha = 3.1294^\circ$. Abbildung 6.13 zeigt zunächst, wie FLOWer in der MAIN Option unter Verwendung des Multi-Grids binnen ca. 1000 Iterationen bis auf Maschinengenauigkeit bei stehendem Widerstands-, Auftriebs- und Nickmomentenbeiwert auskonvergiert. In der ADJOINT Option kann derzeit nur Single-Grid gerechnet werden. Dennoch konvergiert FLOWer ADJOINT binnen 5000 Iterationen zügig bis zu einer Größenordnung des Residuums der ersten Adjungiertenvariablen von 10^{-8} aus.

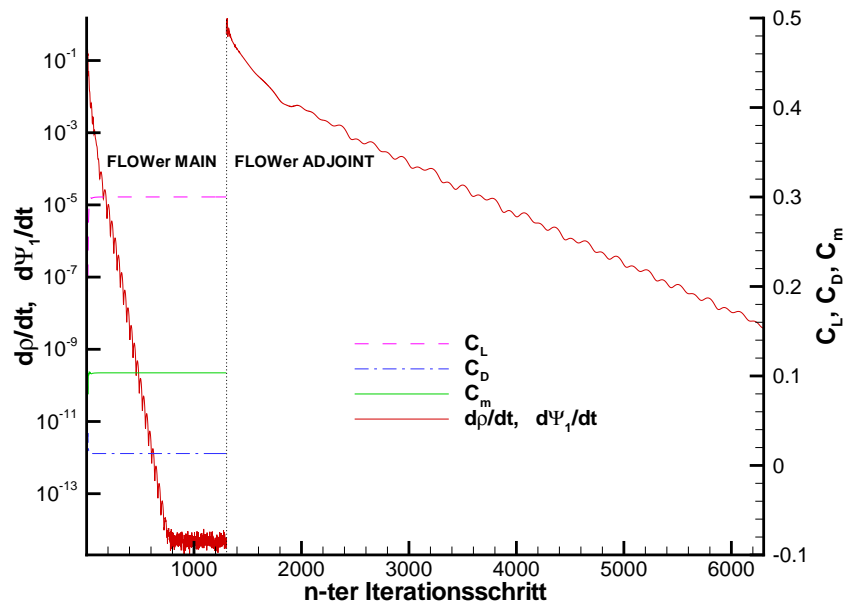


Abbildung 6.13: Konvergenz von FLOWer in MAIN (Multi-Grid) und ADJOINT (Single-Grid) Option für den ONERA-M6-Flügel für den Widerstandsbeiwert C_D als Zielfunktion bei $Ma = 0.84$, $C_L^t = 0.3$ und $\alpha = 3.1294^\circ$.

Die Abbildungen 6.14 bis 6.19 zeigen Konturplots der Dichte sowie der ersten Adjungiertenvariablen für einen Profilschnitt bei einem Drittel der Spannweite des ONERA-M6-Flügels sowie für die Sicht auf und unter den Flügel bei den bereits oben angegebenen Flugbedingungen.

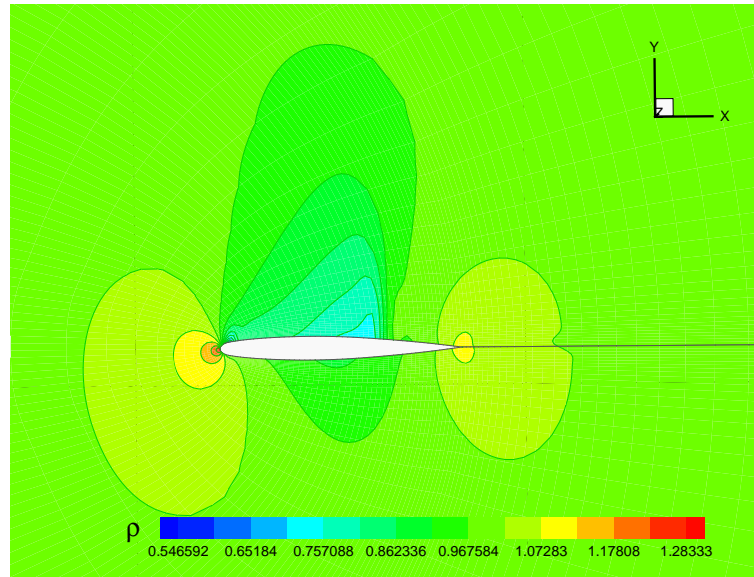


Abbildung 6.14: Konturplot der Dichte ρ , errechnet mit FLOWer in der MAIN Option, für einen Profilschnitt des ONERA-M6-Flügels bei einem Drittel der Spannweite bei $Ma = 0.84$, $C_L^t = 0.3$ und $\alpha = 3.1294^\circ$.

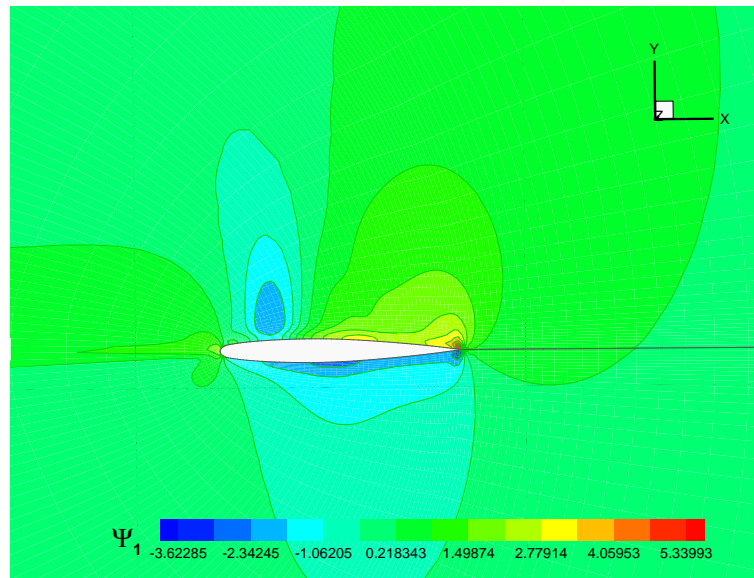


Abbildung 6.15: Konturplot der ersten Komponente des Adjungiertenvektors ψ_1 , errechnet mit FLOWer in der ADJOINT Option, für einen Profilschnitt des ONERA-M6-Flügels bei einem Drittel der Spannweite für den Widerstandsbeiwert C_D als Zielfunktion bei $Ma = 0.84$, $C_L^t = 0.3$ und $\alpha = 3.1294^\circ$.

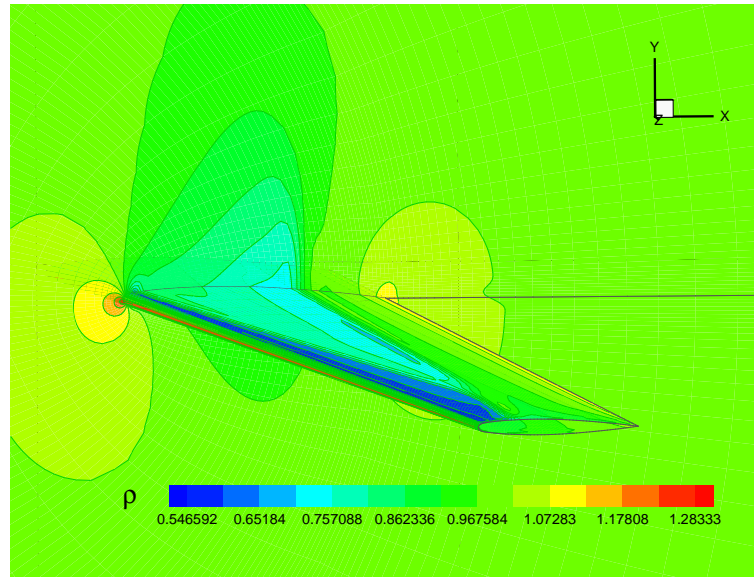


Abbildung 6.16: Konturplot der Dichte ρ , errechnet mit FLOWer in der MAIN Option, für den ONERA-M6-Flügel bei $Ma = 0.84$, $C_L^t = 0.3$ und $\alpha = 3.1294^\circ$. Ansicht von oben.

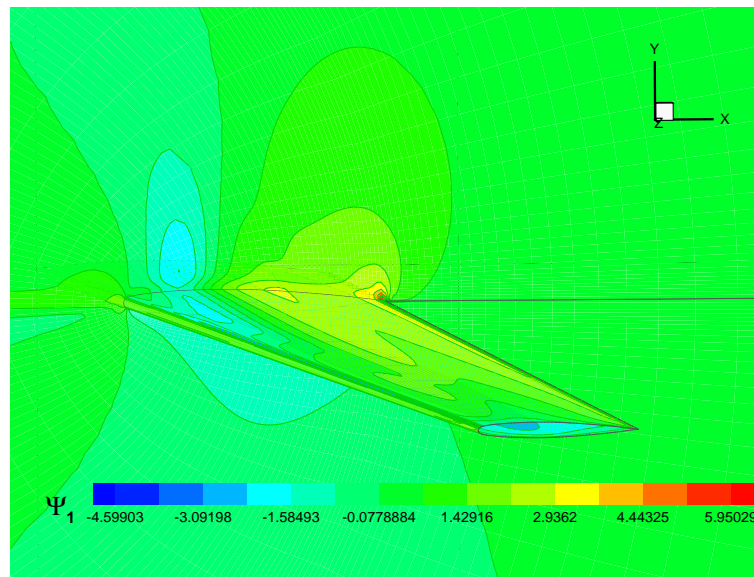


Abbildung 6.17: Konturplot der ersten Komponente des Adjungiertenvektors ψ_1 , errechnet mit FLOWer in der ADJOINT Option, für den ONERA-M6-Flügel für den Widerstandsbeiwert C_D als Zielfunktion bei $Ma = 0.84$, $C_L^t = 0.3$ und $\alpha = 3.1294^\circ$. Ansicht von oben.

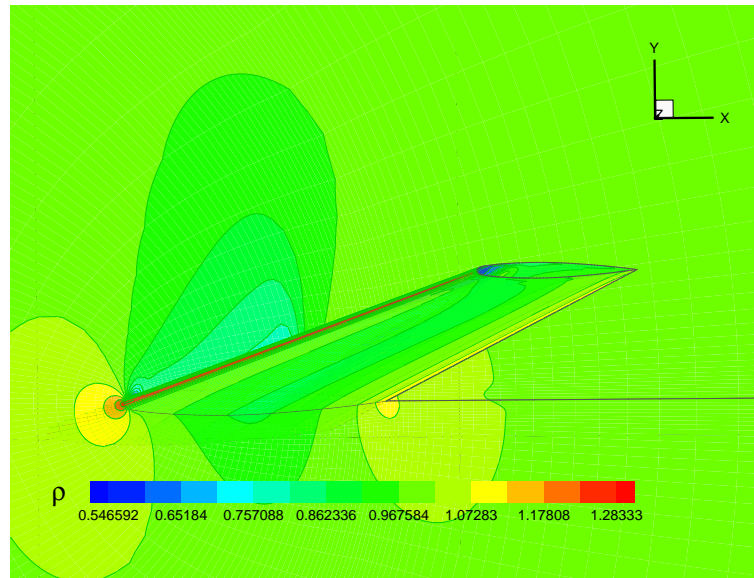


Abbildung 6.18: Konturplot der Dichte ρ , errechnet mit FLOWer in der MAIN Option, für den ONERA-M6-Flügel bei $Ma = 0.84$, $C_L^t = 0.3$ und $\alpha = 3.1294^\circ$. Ansicht von unten.

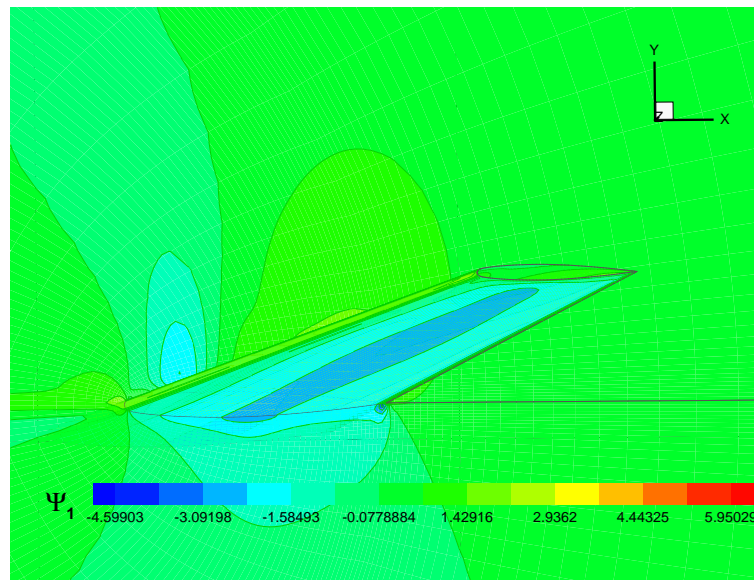


Abbildung 6.19: Konturplot der ersten Komponente des Adjungiertenvektors ψ_1 , errechnet mit FLOWer in der ADJOINT Option, für den ONERA-M6-Flügel für den Widerstandsbeiwert C_D als Zielfunktion bei $Ma = 0.84$, $C_L^t = 0.3$ und $\alpha = 3.1294^\circ$. Ansicht von unten.

Für den Widerstand, den Auftrieb sowie das Nickmoment als Zielfunktion ermitteln wir nun die Gradienten mittels Finiten Differenzen sowie mit dem Adjungiertenverfahren FLOWer ADJOINT unter Verwendung der Oberflächenformulierung (4.215) für den ONERA-M6-Flügel.

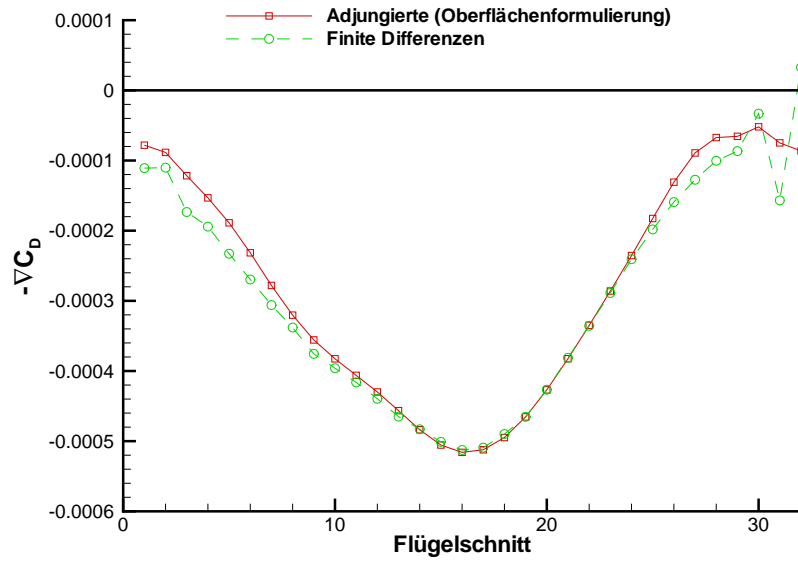


Abbildung 6.20: Widerstandsgradient für den ONERA-M6-Flügel bei $Ma = 0.84$, $C_L^t = 0.3$ und $\alpha = 3.1294^\circ$, errechnet mit FLOWer in der MAIN und ADJOINT Option unter Verwendung der Oberflächenformulierung sowie mit Finiten Differenzen. Die Entwurfsvariablen sind hierbei die Verwindungswinkel der 32 in Spannweitenrichtung des Flügels liegenden Profilschnitte.

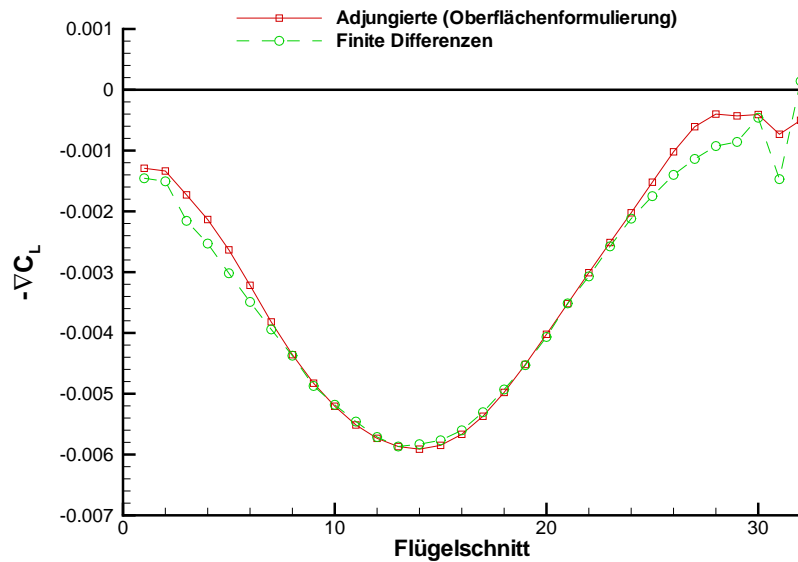


Abbildung 6.21: Auftriebsgradient für den ONERA-M6-Flügel bei $Ma = 0.84$, $C_L^t = 0.3$ und $\alpha = 3.1294^\circ$, errechnet mit FLOWer in der MAIN und ADJOINT Option unter Verwendung der Oberflächenformulierung sowie mit Finiten Differenzen. Die Entwurfsvariablen sind hierbei die Verwindungswinkel der 32 in Spannweitenrichtung des Flügels liegenden Profilschnitte.

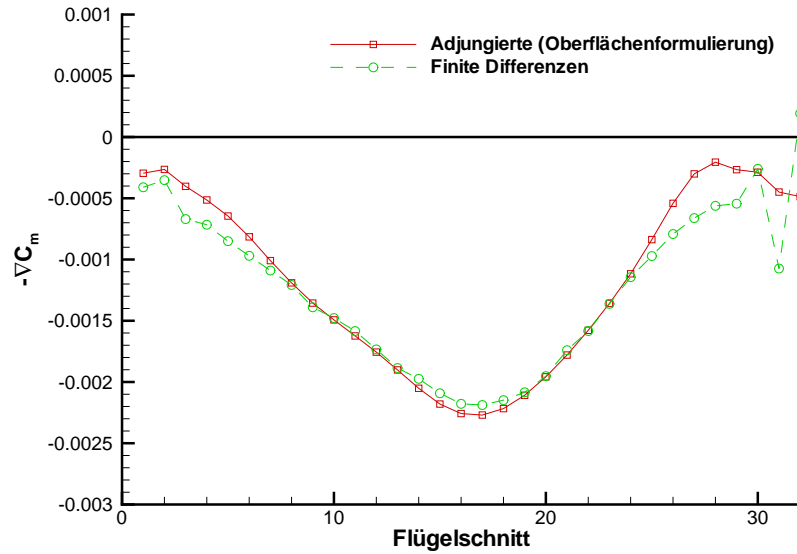


Abbildung 6.22: Gradient des Nickmomentes für den ONERA-M6-Flügel bei $Ma = 0.84$, $C_L^t = 0.3$ und $\alpha = 3.1294^\circ$, errechnet mit FLOWer in der MAIN und ADJOINT Option unter Verwendung der Oberflächenformulierung sowie mit Finiten Differenzen. Die Entwurfsvariablen sind hierbei die Verwindungswinkel der 32 in Spannweitenrichtung des Flügels liegenden Profilschnitte.

Die Entwurfsvariablen sind hierbei die Verwindungswinkel der 32 in Spannweitenrichtung des Flügels liegenden Profilschnitte. Die Abbildungen 6.20, 6.21 und 6.22 zeigen jeweils für den Innenflügelbereich eine gute Übereinstimmung der adjungierten Gradienten mit den Finiten Differenzen. Je weiter man zur Flügelaußenkante kommt, desto schwieriger erweist sich das Tuning der Finiten Differenzen. Die Physik wird durch die adjungierten Sensitivitäten sicher besser wiedergegeben, da diese keine solch starken Oszillationen zeigen, wie die der Finiten Differenzen. Hier zeigt sich der Vorteil der Exaktheit der adjungierten Gradienten.

Nun kommen wir zu der in [GB02a] beschriebenen Anwendung von FLOWer ADJOINT in einer automatisierten Optimierungsschleife. Wir betrachten dabei das Optimierungsproblem der Widerstandsreduktion des transsonischen RAE2822-Profiles bei $Ma = 0.73$ unter den aerodynamischen Nebenbedingungen, daß sowohl der Auftrieb als auch das Nickmoment bei einem festen Anstellwinkel von $\alpha = 2^\circ$ konstant gehalten werden sollen. Das Festhalten des Anstellwinkels ist dabei eine anspruchsvolle Forderung, da man ansonsten nach jeder Reduktion des Widerstandes die Beiwerte des Auftriebes oder des Nickmomentes leicht durch Variation von α auf die geforderten Werte nachregeln könnte. Zusätzlich wird als geometrische Nebenbedingung eine konstante Profildicke gefordert. Da im transsonischen Falle der durch einen Verdichtungsstoß induzierte Wellenwiderstand eine entscheidende Rolle spielt, kann hier bereits eine physikalisch sinnvolle aerodynamischen Formoptimierung, kontrolliert durch die (adjungierten) Euler-Gleichungen, vorgenommen werden. Ansonsten ist im Falle der Widerstandsreduktion die Erweiterung der Kontrollgleichungen von den Euler- zu den Navier-Stokes-Gleichungen, insbesondere im Detailentwurf, eine Unabdingbarkeit.

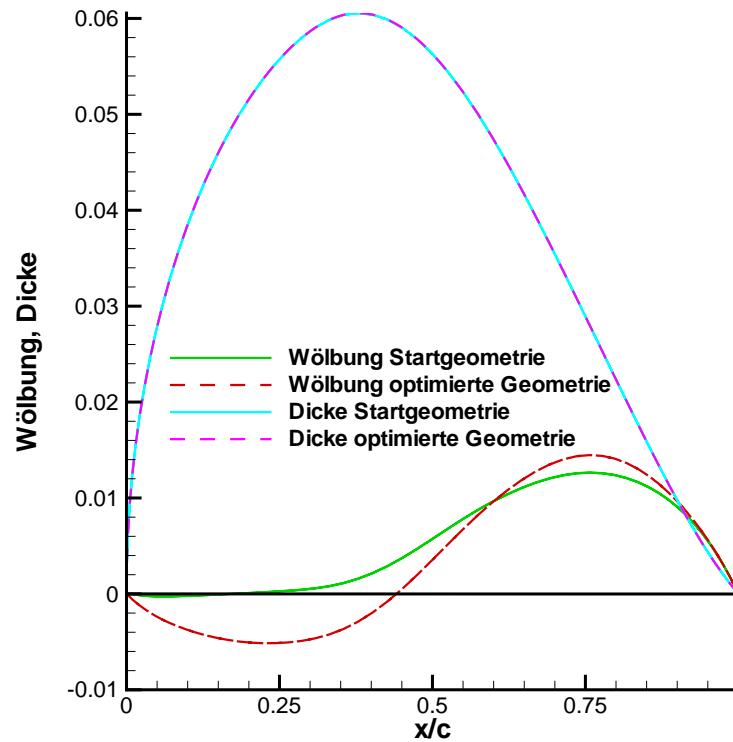


Abbildung 6.23: Wölbungs- sowie Dickenverteilung der Startgeometrie des RAE2822-Profiles sowie der optimierten Geometrie zum Optimierungsproblem der Widerstandsreduktion bei konstantem Auftrieb und Nickmoment sowie konstanter Profildicke bei $Ma = 0.73$ und $\alpha = 2^\circ$.

Um die geometrische Nebenbedingung einer konstanten Profildicke während des gesamten Optimierungsprozesses einzuhalten, wurde einfach die Dickenverteilung der Ausgangsgeometrie des RAE2822-Profiles beibehalten, die zusammen mit einer durch 20 Hicks-Henne-Funktionen parametrisierten Wölbungsverteilung die jeweilige Profilgeometrie eindeutig beschreibt. Abbildung 6.23 zeigt gerade die während des Optimierungsprozesses konstant gehaltene Dickenverteilung sowie die Ausgangswölbung des RAE2822-Profiles und die Wölbung zur optimierten Profilgeometrie. Für das RAE 2822-Profil wird einmal mit dem ebenfalls in MEGAFLOW entwickelten Netzgenerator MegaCads [BHR⁺96] manuell ein in z-Richtung periodisch gestaffeltes Quasi-2D-Netz vom C-Typ mit $320 \times 56 \times 6$ Zellen generiert. Bei dieser einmaligen manuellen Netzgenerierung wird zusätzlich ein Skript-File für MegaCads erzeugt, welches dann außer für die RAE2822-Profilgeometrie auch für deren modifizierte Profilgeometrien als Prozessbeschreibung für MegaCads dient, um in der automatisierten Optimierungsschleife jeweils die C-Netze identischer Topologie vollautomatisch zu erzeugen. Die Euler-Lösungen werden jeweils mit FLOWer in der MAIN Option berechnet. Durch das Nutzen der Multi-Grid-Technik konvergiert FLOWer MAIN schnell bis zu der geforderten Genauigkeit des Dichteresiduums von $|\frac{d\rho}{dt}| \leq 0.5 \cdot 10^{-10}$ aus. So wird sichergestellt, daß der numerische Fehler klein im Verhältnis zu den Minimierungsschritten der Zielfunktion ist, also die Zielgröße und nicht der numerische Fehler optimiert wird. Wie sich herausstellte genügte hingegen für das Lösen der adjungierten Euler-Gleichungen mit FLOWer ADJOINT eine Konvergenz von nur drei Größenordnungen.

gen um hinreichend genaue Gradienten der Zielfunktion sowie Nebenbedingungen zu erhalten. Diese Erfahrung deckt sich mit denen der Gruppe um Jameson (siehe z.B. [NJ01]).

Die Optimierungsstrategie ist das in Abschnitt 4.3.3 beschriebene Verfahren restringierter steilster Abstiege unter Verwendung der orthogonalen Projektion.

Der gesamte automatische Optimierungsprozeß besteht aus Geometrie- sowie Netzgenerierung, Strömungs- sowie adjungierter Strömungslösung, Auswertung adjungierter Gradienten der Zielfunktion sowie Nebenbedingungen und schließlich der durch die Optimierungsstrategie der restringierten steilsten Abstiege gesteuerten Line Searches. Die Bestandteile dieser Optimierungskette werden schließlich in die Optimierungsschale des SynapsPointer® [Fro98] eingebettet. Diese flexible Schale übernimmt das gesamte I/O-Geschäft und identifiziert die Optimierungsstrategie des restringierten steilsten Abstieges als Steueroutine der Optimierungsschleife/Prozeßkette.

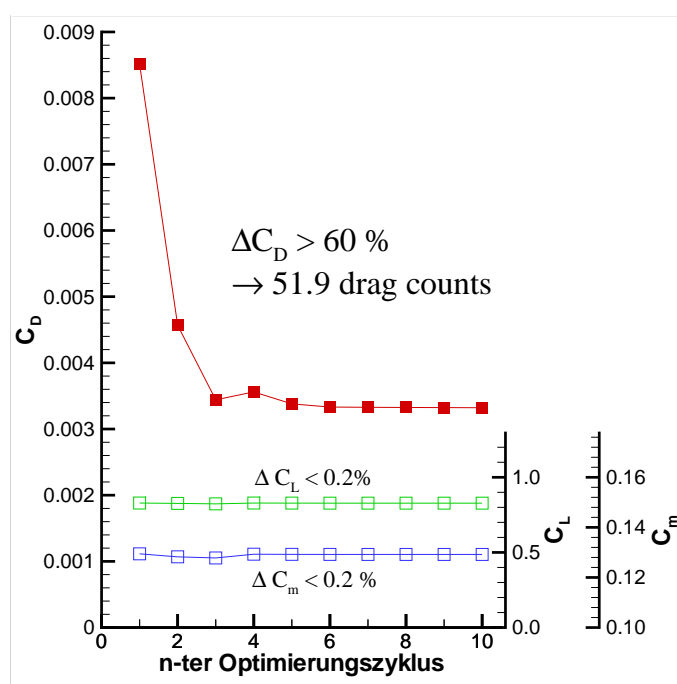


Abbildung 6.24: Optimierungsverlauf des Widerstands-, Auftriebs- sowie Nickmomentenbeiwertes für das Optimierungsproblem der Widerstandsreduktion des RAE2822-Profiles bei konstantem Auftrieb, Nickmoment, Anstellwinkel sowie konstanter Profildicke bei $Ma = 0.73$ und $\alpha = 2^\circ$. 20 Hicks-Henne-Funktionen parametrisieren hierbei die Profilgeometrien. Optimierungsstrategie ist der restringierte steilste Abstieg unter Verwendung des Adjungiertenverfahrens für die Ermittlung der Gradienten der Zielfunktion sowie Nebenbedingungen.

Abbildung 6.24 zeigt den Optimierungsverlauf des Widerstands-, Auftriebs- sowie Nickmomentenbeiwertes. Ein Optimierungszyklus besteht hier aus der Ermittlung der Gradienten der Zielfunktion sowie der Nebenbedingungen mit dem Adjungiertenverfahren, der Errechnung der restringierten Suchrichtung vermöge orthogonaler Projektionen und dem Line Search, bei dem das Minimum in Suchrichtung mittels quadratischer Interpolation gefunden wird. In den ersten drei Optimierungszyklen sowie den

Zyklen fünf bis zehn war die Zielfunktion jeweils der Widerstandsbeiwert. Aufgrund des bereits in den ersten drei Optimierungszyklen so rasant abfallenden Widerstandsbeiwertes kommt es aufgrund der Nichtlinearität des Optimierungsproblems unter Verwendung der Methode restringierter steilster Abstiege zu einer über der Toleranz von $|\Delta C_m| < 0.2\%$ liegenden Abweichung des konstant zu haltenen Nickmomentenbeiwertes. Also wird im vierten Schritt das Ausgangsnickmoment als Zielfunktion unter der Nebenbedingung konstanten Auftriebes gesetzt, also ein Korrekturschritt eingefügt, der das Halten der Nebenbedingungen zu den vorgegebenen Toleranzen im weiteren Optimierungsverlauf garantieren soll. Wie man sieht, wird hierbei der Widerstand nur geringfügig erhöht. Nun geht es mit der eigentlichen Zielgröße, dem Widerstandsbeiwert, weiter. Der Widerstandsbeiwert fällt weiter unter den Wert des dritten Schrittes und die Nebenbedingungen bleiben erfüllt. Insgesamt erhält man eine Widerstandsreduktion von 51.9 Drag Counts, was einer Reduktion um mehr als 60% gleichkommt.

Der in Abbildung 6.25 gezeigte Zoom des Optimierungsverlaufes des Widerstandsbeiwertes aus Abbildung 6.24 zeigt die in der Theorie geforderte lineare Konvergenz des Verfahrens restringierter steilster Abstiege.

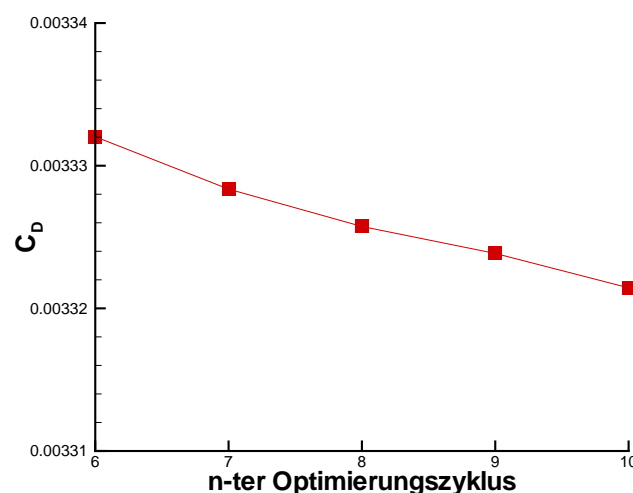


Abbildung 6.25: Zoom des Optimierungsverlaufes des Widerstandsbeiwertes aus Abbildung 6.24 für das Optimierungsproblem der Widerstandsreduktion des RAE2822-Profiles bei konstantem Auftrieb, Nickmoment, Anstellwinkel sowie konstanter Profildicke bei $Ma = 0.73$ und $\alpha = 2^\circ$. 20 Hicks-Henne-Funktionen parametrisieren hierbei die Profilgeometrien. Optimierungsstrategie ist der restringierte steilste Abstieg unter Verwendung des Adjungiertenverfahrens für die Ermittlung der Gradienten der Zielfunktion sowie Nebenbedingungen.

Der starke Stoß, der noch auf der Kontur des transsonischen RAE2822-Profiles zu sehen ist, verschwindet vollkommen, wie zuvor erwartet, für die optimierte Profilgeometrie (siehe hierzu Abbildung 6.26). Der stoßinduzierte Wellenwiderstand wird also vollständig abgebaut und was übrig bleibt ist lediglich die numerische Reibung, verursacht durch die künstliche Dissipation, Randbehandlung und Diskretisierung. Die Druckverteilung zur optimierten Geometrie weist zusätzlich eine sehr viel grö-

ßere Saugspitze an der Profilnase auf sowie ein größeres Rear Loading als die zum RAE2822-Profil zugehörige. Auf diese Weise wird den aerodynamischen Nebenbedingungen des konstanten Auftriebs und Nickmomentes Rechnung getragen.

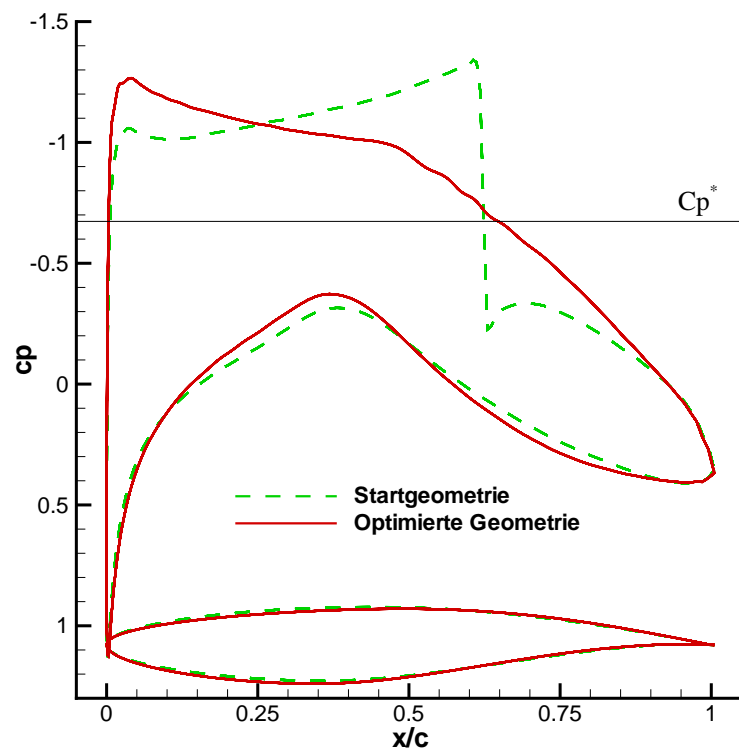


Abbildung 6.26: Das RAE2822-Profil und dessen optimierte Geometrie sowie die zugehörigen Druckverteilungen für das Optimierungsproblem der Widerstandsreduktion bei konstantem Auftrieb, Nickmoment, Anstellwinkel sowie konstanter Profildicke bei $Ma = 0.73$ und $\alpha = 2^\circ$. 20 Hicks-Henne-Funktionen parametrisieren hierbei die Profilgeometrien. Optimierungsstrategie ist der restringierte steilste Abstieg unter Verwendung des Adjungiertenverfahrens für die Ermittlung der Gradienten der Zielfunktion sowie Nebenbedingungen.

Innerhalb des EU-Projektes AEROSHAPE (Multi-point **AERO**dynamic **SHAPE** Optimization [Sel00]) soll die Flügel-Rumpf-Konfiguration des Überschallverkehrsflugzeuges EUROSUP (**EURO**pean **SUP**ersonic Commercial Aircraft), in Abbildung 6.27 dargestellt, optimiert werden. Das dafür erforderliche Mehrblock-Rechennetz wurde von Th. Wienberg am DLR generiert, anhand einer Netzkonsistenzstudie auf seine Qualität hin überprüft sowie an sämtliche Projektpartner ausgeliefert [Wie00]. Das Rechennetz besteht insgesamt aus 1.560.000 Zellen und ist in allen fünf Blöcken Multigrid-fähig (siehe Abbildung 6.28). Das nächst gröbere Netz besteht aus 195.000 Zellen, das größte aus 24.375 Zellen, so daß schließlich auf drei Stufen mit Multigrid gerechnet werden kann. Die Netzkonsistenzstudie hat gezeigt, daß nach dem Auskonvergieren des Dichteresiduum bis zu einer Größenordnung von $0.5 \cdot 10^{-4}$ die Abweichungen in den Beiwerten für den Widerstand sowie den Auftrieb und das Nickmoment kleiner als 0.5% sind. Man kann bereits auf dem mittleren Rechennetz mit 195.000 Zellen die numerische Optimierung vornehmen.

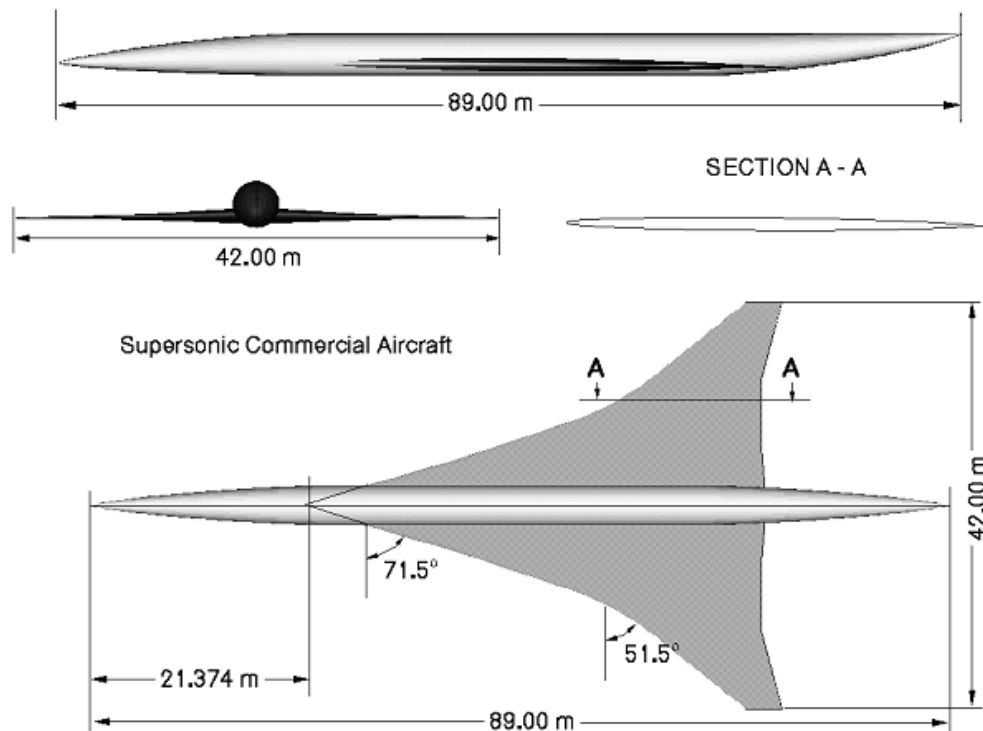


Abbildung 6.27: Flügel-Rumpf-Konfiguration des Überschallverkehrsflugzeuges EUROSUP (EUROpean SUPersonic Commercial Aircraft)

Eine Rechnung von FLOWer MAIN benötigt auf dem mittelfeinen Netz mit den 195.000 Zellen auf dem Supercomputer NEC-SX5 ca. 10 Minuten. Die Abbildung 6.29 zeigt in den ersten 500 Iterationsschritten den Konvergenzverlauf von FLOWer MAIN auf eben diesem Netz bei einer Anströmgeschwindigkeit von $Ma = 2.0$ und einem Anstellwinkel von $\alpha = 3.5^\circ$ unter Verwendung des Multigrid. Ein Ziel in AEROSHAPE ist die Flügel-Rumpf-Optimierung der EUROSUP-Konfiguration, für deren Parametrisierung von Flügel und Rumpf man mindestens 50 Entwurfsparameter benötigt, um den Rumpf sowie ausgewählte Flügelschnitte sowie deren Verwindung zu modellieren. Für den vergleichsweise simplen Fall lediglich einer Rumpfeinschnürung genügen zunächst nur fünf Entwurfsvariablen. Für den Fall der Rumpfeinschnürung wurde zunächst eine erste Optimierung vermöge einer simplen auf Finiten Differenzen basierenden Optimierungsstrategie vorgenommen [GW01], die Zielfunktion war dabei der Widerstandsbeiwert. Hierfür wurden bereits 220 Strömungsrechnungen benötigt, was einer Gesamtrechenzeit von ca. 37 Stunden entspricht. Da auf der NEC-SX5 jedoch mit einem Queuing-System gearbeitet werden muß, liegt die Antwortzeit für einen solchen Optimierungslauf bei bis zu drei Tagen. Der Fall der Flügel-Rumpf-Optimierung, so wird hier schlagartig klar, ist mit vernünftigen Antwortzeiten nur unter Einsatz eines Adjungiertenverfahrens zu rechnen. Der Einsatz von genetischen Strategien ist hier geradezu undenkbar.

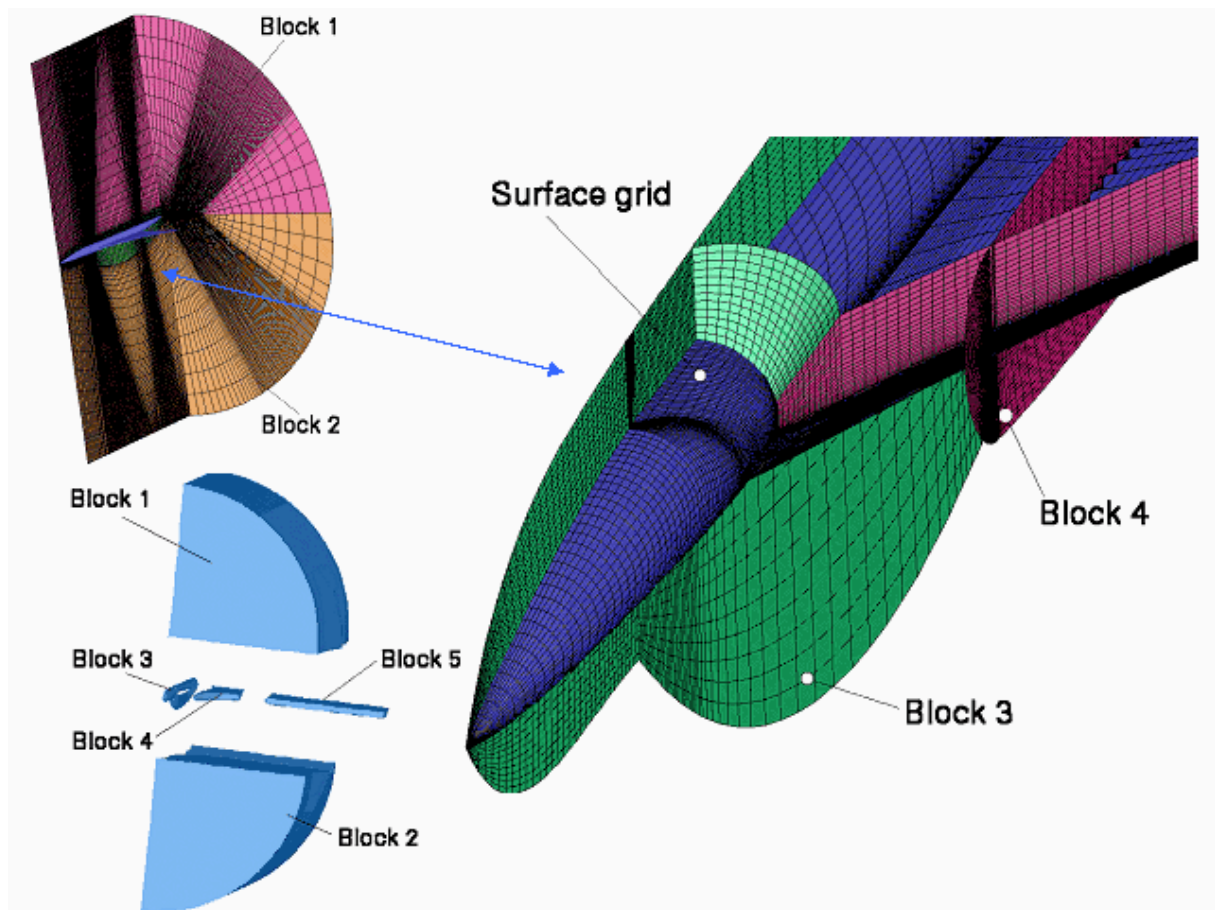


Abbildung 6.28: Das Mehrblock-Rechnetz für die Flügel-Rumpf-Konfiguration des Überschallverkehrsflugzeuges EUROSUP (EUROpean SUPersonic Commercial Aircraft) besteht aus fünf Blöcken mit 1.560.000 Zellen mit den zwei Vergrößerungsstufen von 195.000 und 24.375 Zellen.

Vorbereitend für eine Adjungiertenoptimierung wurden erste Testrechnungen von FLOWer ADJOINT auf diesem komplexen Mehrblockrechnetz vorgenommen. Ein erfolgreicher Lauf von FLOWer ADJOINT für diesen auch physikalisch sehr anspruchsvollen Anwendungsfall im Überschall, kann als erster Nachweis für die Einsetzbarkeit von FLOWer ADJOINT in der industrierelevanten Anwendung gesehen werden. Ein erneuter Blick auf Abbildung 6.29 zeigt den ordentlichen Konvergenzverlauf von FLOWer in der ADJOINT Option im Singlegrid-Modus. Die Abbildungen 6.30 und 6.31 zeigen die Konturplots der Dichte sowie der ersten Komponente des Adjungiertenvektors. In der Zoomansicht aus Abbildung 6.32 kann man ferner erkennen, daß an den verschiedenen Blockgrenzen ein korrekter Werteübergang erfolgt. Motiviert durch diese ordentlichen Resultate von FLOWer ADJOINT wird nun in Kürze mit der Adjungiertenoptimierung für diesen komplexen Anwendungsfall in AEROSHAPE begonnen. Dabei wird erneut von der Oberflächenformulierung (4.215) für die adjungierten Gradienten Gebrauch gemacht werden.

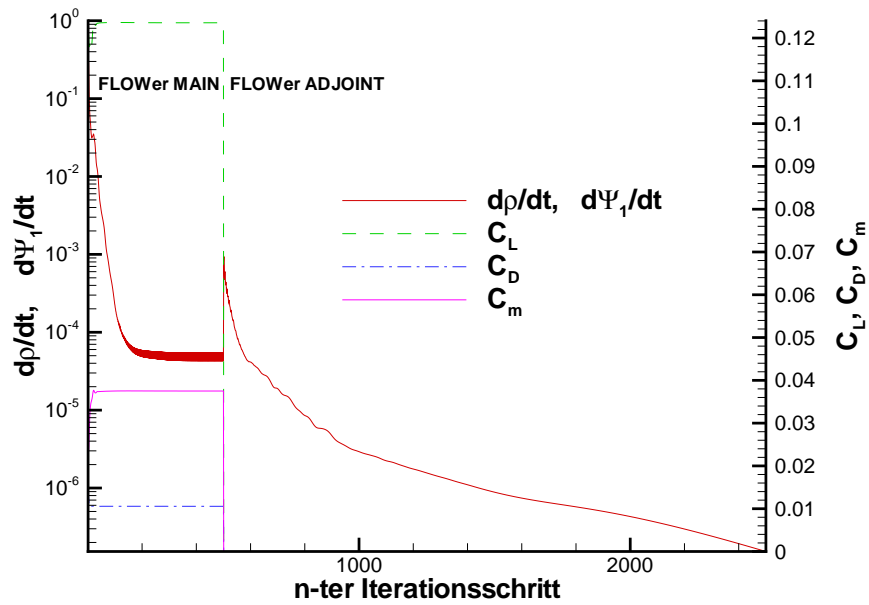


Abbildung 6.29: Konvergenzverlauf von FLOWer in MAIN und ADJOINT Option für die Flügel-Rumpf-Konfiguration des Überschallverkehrsflugzeuges EUROSUP (EUROpean SUPersonic Commercial Aircraft) für eine Anströmgeschwindigkeit von $Ma = 2.0$ und einen Anstellwinkel von $\alpha = 3.5^\circ$ für den Fall der Widerstandsreduktion.

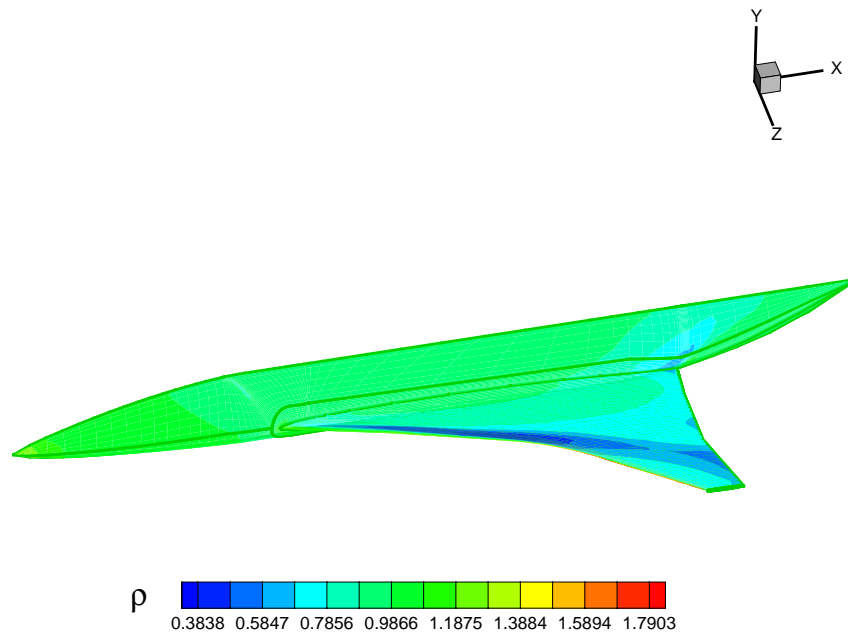


Abbildung 6.30: Konturplot der Dichte ρ , errechnet mit FLOWer in der MAIN Option, für die Flügel-Rumpf-Konfiguration des Überschallverkehrsflugzeuges EUROSUP (EUROpean SUPersonic Commercial Aircraft) bei $Ma = 2.0$ und $\alpha = 3.5^\circ$.

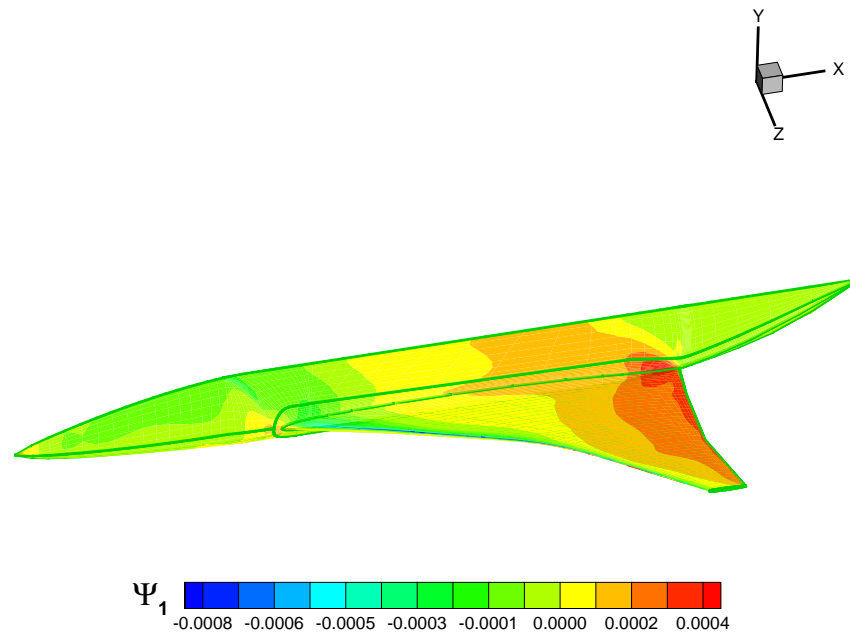


Abbildung 6.31: Konturplot der ersten Komponente des Adjungiertenvektors ψ_1 , errechnet mit FLOWer in der ADJOINT Option, für die Flügel-Rumpf-Konfiguration des Überschallverkehrsflugzeuges EURO SUP (**EURO**pean **SUP**ersonic Commercial Aircraft) für den Fall der Widerstandsreduktion bei $Ma = 2.0$ und $\alpha = 3.5^\circ$.

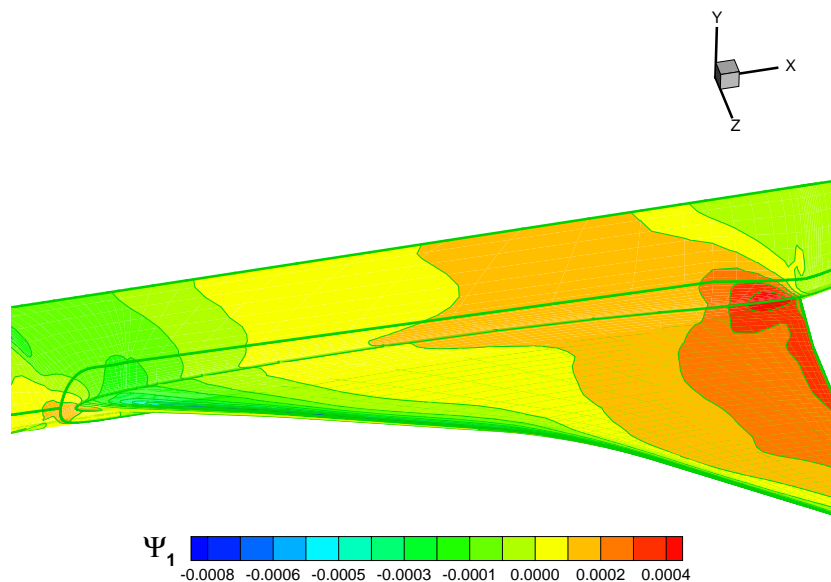


Abbildung 6.32: Konturplot der ersten Komponente des Adjungiertenvektors ψ_1 , errechnet mit FLOWer in der ADJOINT Option, für die Flügel-Rumpf-Konfiguration des Überschallverkehrsflugzeuges EURO SUP (**EURO**pean **SUP**ersonic Commercial Aircraft) für den Fall der Widerstandsreduktion bei $Ma = 2.0$ und $\alpha = 3.5^\circ$. Zoomansicht.

7 Zusammenfassung und Ausblick

Zunächst wurden anhand der diskreten Adjungierten für lineare Gleichungen das Adjungiertenverfahren eingeführt, erklärt und seine Vorteile erläutert. Als eine natürliche Erweiterung wurde das kontinuierliche Adjungiertenverfahren vorgestellt und ein Verfahren zur Konstruktion adjungierter Randoperatoren erarbeitet. Überlegungen zur Wohlgestellttheit adjungierter Problemformulierungen wurden vorgenommen.

Der Einsatz des Adjungiertenverfahrens in der aerodynamischen Formoptimierung wurde im Detail für die Euler-Gleichungen als Kontrollgleichungen erklärt, sowie die Eigenschaften der adjungierten Euler-Gleichungen untersucht. Die Zielgrößen waren hierbei der Widerstand, der Auftrieb sowie das Nickmoment. Neben der bekannten Volumenformulierung der Gradienten der Zielgrößen wurde eine neue, praktikablere Oberflächenformulierung hergeleitet und numerisch erprobt.

Die Implementierung eines adjungierten Euler-Lösers in den RANS-Löser FLOWer wurde erklärt und dessen Validierung und Einsatz in der aerodynamischen Formoptimierung dargelegt.

Im Rahmen des EU-Projektes AEROSHAPE [Sel00] wurde bereits damit begonnen, FLOWer ADJOINT für die adjungierten Navier-Stokes-Gleichungen [WGQ⁺03] zu erweitern. Diese Arbeiten sollen in Kürze im Rahmen des Verbundvorhabens MEGA-DESIGN abgeschlossen werden. Hier ist insbesondere für das Adjungieren der Turbulenzmodelle der hybride Einsatz von AD-Tools vorstellbar. Hybrid in dem Sinne, als daß der bestehende handadjungierte Code um das algorithmisch differenzierte Turbulenzmodell ergänzt wird.

Ferner ist der Einsatz des Adjungiertenverfahrens für die Turbomaschinen-aerodynamik denkbar. Hier wurden im Rahmen einer Industriebeauftragung durch die MTU Aero Engines GmbH bereits Voruntersuchungen zur Machbarkeit [GM01] durchgeführt.

Literaturverzeichnis

- [AMR01] J. J. Alonso, J. R. Martins, and J. Reuther. Aero-structural wing design optimization using high-fidelity sensitivity analysis. *DGLR Report 2001-05 of the CEAS Conference on Multidisciplinary Aircraft Design and Optimization in Köln, Germany*, pages 211–226, 2001.
- [AMR02] J. J. Alonso, J. R. Martins, and J. Reuther. High-fidelity aero-structural design optimization of a supersonic business jet. *AIAA 2002-1483*, 2002.
- [AV99] W. K. Anderson and V. Venkatakrishnan. Aerodynamic design optimization on unstructured grids with a continuous adjoint formulation. *Computers and Fluids*, 28(4-5):443–480, 1999.
- [Bar96] W. Bartelheimer. Ein Entwurfsverfahren für Tragflügel in transsonischer Strömung. *Dissertation, TU Braunschweig, DLR-FB 96-30*, 1996.
- [Bar97] W. Bartelheimer. Stand der Arbeiten zur Lösung der adjungierten Euler-Gleichungen. *DLR-Report IB 129-97/18*, 1997.
- [BBLR01] C. H. Bischof, H. M. Bücker, B. Lang, and A. Rasch. Automatic differentiation of the FLUENT CFD program: procedure and first results. *Working Note of the Institute for Scientific Computing RWTH-CS-SC-01-22, Aachen University of Technology, Aachen*, 2001.
- [BE92] O. Baysal and M. E. Eleshaky. Aerodynamic design optimization using sensitivity analysis and computational fluid dynamics. *AIAA J.*, 30(3):718–725, 1992.
- [BHR⁺96] O. Brodersen, M. Hepperle, A. Ronzheimer, C. C. Rossow, and B. Schöning. The parametric grid generation system megacads. *Proc. of the 5th International Conference on Numerical Grid Generation in Comp. Field Simulations. (Ed. B.K.Soni, J.F.Thompson, J.Häuser, P.Eiseman), NSF Eng. Center, Mississippi*, pages 353–362, 1996.
- [BR01] R. Becker and R. Rannacher. An optimal control approach to error control and mesh adaption in finite element methods. *Acta Numerica 2001 (A. Iserles, ed.), Camebridge University Press*, pages 1–102, 2001.
- [BTW82] P. T. Boggs, J. W. Tolle, and P. Wang. On the local convergence of quasi-Newton methods for constrained optimization. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 20:161–171, 1982.

- [CSM91] H. Cabuk, C. H. Shung, and V. Modi. Adjoint operator approach to shape design for internal incompressible flow. In G.S. Dulikravich, editor, *Proc. 3rd International Conference on Inverse Design and Optimization in Engineering Sciences*, pages 391–404, 1991.
- [DG99] A. Dadone and B. Grossman. CFD design problems using progressive optimization. *AIAA 99-3295*, 1999.
- [EEHJ95] K. Eriksson, D. Estep, P. Hansbo, and C. Johnson. Introduction to adaptive methods for differential equations. *Acta Numerica 1995 (A. Iserles, ed.)*, Cambridge University Press, pages 105–158, 1995.
- [FHMS96] O. Friedrich, D. Hempel, A. Meister, and Th. Sonar. Adaptive computation of unsteady flow fields with the DLR- τ -code. *AGARD Conference Proceedings CP-578, Paper 37*, 1996.
- [flu] FLUENT, Inc., <http://www.fluent.com/>.
- [Fro98] O. Frommann. Conflicting criteria handling in multiobjective optimization using the principles of fuzzy logic. *AIAA-98-2730*, 1998.
- [Gau01] N. Gauger. Aerodynamic shape optimization using the adjoint Euler equations. *Proceedings of the GAMM Workshop: Discrete Modelling and Discrete Algorithms in Continuum Mechanics (Eds.: I. Thomas, Th. Sonar)*, pages 87–96, Logos Verlag Berlin, 2001.
- [GB02a] N. Gauger and J. Brezillon. Aerodynamic shape optimization using adjoint method. *Journal of Aero. Soc. of India*, 54(3):247–254, 2002.
- [GB02b] N. Gauger and J. Brezillon. DLR’s technical annex to the 2nd year progress report of the European project AEROSHAPE. *DLR-IB-124-2002/13*, 2002.
- [GHS99] T. Gerhold, V. Hannemann, and D. Schwamborn. On the validation of the DLR- τ -code. *Notes on Numerical Fluid Mechanics, Proceedings of the AG STAB Symposium 1998*, pages 426–433, Vieweg Verlag, 1999.
- [Gil97] M. B. Giles. Adjoint equations in CFD: duality, boundary conditions and solution behaviour. *AIAA 97-1850*, 1997.
- [Gil02] M. B. Giles. Personal notes on ‘Adjoint equations in CFD: duality, boundary conditions and solution behaviour’. *E-Mail-Austausch zwischen M. Giles und N. Gauger*, 2002.
- [GKO95] B. Gustafsson, H. O. Kreiss, and J. Oliger. *Time Dependent Problems and Difference Methods*. John Wiley, 1995.
- [GKS03] R. Giering, T. Kaminski, and T. Slawig. Generating efficient derivative code with TAF: Adjoint and tangent linear Euler flow around an airfoil. *Future Generation Computer Systems*, to appear in 2003.
- [GL89] G. H. Golub and C. F. Van Loan. *Matrix Computations*. The Johns Hopkins University Press, 2. edition, 1989.

- [GM01] N. Gauger and M. Mauß. Das Adjungiertenverfahren in der aerodynamischen Optimierung von Turbomaschinen. *DLR-IB-129-2001/22*, 2001.
- [GM02] A. Griewank and C. Mitev. Detecting jacobian sparsity patterns by bayesian probing. *Mathematical Programming, Ser. A*, 93:1–25, 2002.
- [God59] S. K. Godunov. Finite difference method for numerical computation of discontinuous solutions of the equations of fluid dynamics. *Mat. Sb.*, 47:271–306, 1959.
- [GP00] M. B. Giles and N. A. Pierce. An introduction to the adjoint approach to design. *Kluwer Academic Publishers*, Netherlands 2000.
- [Gri00] A. Griewank. *Evaluating Derivatives, Principles and Techniques of Algorithmic Differentiation*. Number 19 in Frontiers in Appl. Math. SIAM, Philadelphia, 2000.
- [GW00] A. Griewank and A. Walther. Revolve: An implementation of checkpointing for the reverse or adjoint mode of computational differentiation. *Transaction on Mathematical Software*, 26(1), 2000.
- [GW01] N. Gauger and Th. Wienberg. DLR's contribution to the technical annex of the yearly progress report of the AEROSHAPE project. *AEROSHAPE's 1st Year Progress Report*, 2001.
- [HH78] R. M. Hicks and P. A. Henne. Wing design by numerical optimization. *Journal of Aircraft*, 15:407–412, 1978.
- [Hir88] C. Hirsch. *Numerical Computation of Internal and External Flows*. John Wiley, Vol. I, 1988.
- [HL92] J. Hoschek and D. Lasser. *Grundlagen der geometrischen Datenverarbeitung*. B. G. Teubner, Stuttgart, 1992.
- [HMY⁺93] W. P. Huffman, R. G. Melvin, D. P. Young, F. T. Johnson, M. B. Bieterman J. E. Bussioletti, and C. L. Himes. Practical design and optimization in computational fluid dynamics. *AIAA 93-3111*, 1993.
- [Hof82] J. D. Hoffman. Relationship between the truncation errors of centered finite difference approximation on uniform and non-uniform meshes. *Journal Comp. Physics*, 46:469–477, 1982.
- [Jam88] A. Jameson. Aerodynamic design via control theory. *Journal of Scientific Computing*, 3:233–260, 1988.
- [Jam89] A. Jameson. Computational aerodynamics for aircraft design. *Science*, 245:361–371, 1989.
- [Jam94] A. Jameson. Optimum aerodynamic design via boundary control. *AGARD-R-803*, pages 3.1–3.33, 1994.
- [Jam95a] A. Jameson. Optimum aerodynamic design using CFD and control theory. *AIAA-95-1729-CP*, 1995.

- [Jam95b] A. Jameson. Optimum aerodynamic design using control theory. *Comput. Fluid Dynam. Review 1995*, pages 495–528, John Wiley & Sons, 1995.
- [Jam99] A. Jameson. Re-engineering the design process through computation. *J. Aircraft*, 36(1):36–50, 1999.
- [JMP98] A. Jameson, L. Martinelli, and N. A. Pierce. Optimum aerodynamic design using the Navier-Stokes equations. *Theoret. Comput. Fluid Dynamics*, 10:213–237, Springer, 1998.
- [JR94] A. Jameson and J. Reuther. Control theory based airfoil design using the Euler equations. *AIAA Proceedings 94-4272-CP*, 1994.
- [JST81] A. Jameson, W. Schmidt, and E. Turkel. Numerical solutions of the Euler equation by finite volume methods using Runge-Kutta time-stepping schemes. *AIAA 81-1259*, 1981.
- [KAJ02] S. Kim, J.J. Alonso, and A. Jameson. Design optimization of high-lift configurations using a viscous continuous adjoint method. *AIAA 2002-0844*, 2002.
- [Kea01] N. Kroll and Th. Gerhold et al. Parallel large scale computations for aerodynamic aircraft design with the German CFD system MEGAFLOW. *Proceedings of 'Parallel CFD 2001', Egmond aan Zee*, 2001.
- [KEB99] N. Kroll, B. Einfeld, and H. M. Bleecke. FLOWer. *Notes on Numerical Fluid Mechanics*, 71:58–68, Vieweg Verlag Braunschweig, 1999.
- [KIH91] V. M. Korivi, A. C. Taylor III, and G. W. Hou. Sensitivity analysis, approximate analysis and design optimization for internal and external viscous flows. *AIAA 91-3083*, 1991.
- [KJ87] N. Kroll and R.K. Jain. Solution of the two-dimensional Euler equations - experience with a finite volume code. *DFVLR-FB 87-11*, 1987.
- [KRBT98] N. Kroll, C.C. Rossow, K. Becker, and F. Thiele. MEGAFLOW - a numerical flow simulation system. *21st ICAS Symposium, paper 98-2.7.4*, Melbourne, Australia, 1998.
- [KRBT00] N. Kroll, C.C. Rossow, K. Becker, and F. Thiele. The MEGAFLOW project. *Aerosp. Sci. Technol.*, 4:223–237, 2000.
- [Kre70] H. O. Kreiss. Initial boundary value problems for hyperbolic systems. *Comm. Pure Appl. Math.*, 23:277–298, 1970.
- [KRS⁺02] N. Kroll, C.C. Rossow, D. Schwamborn, K. Becker, and G. Heller. MEGAFLOW - A numerical flow simulation tool for transport aircraft design. *ICAS Congress 2002, Paper no. 1.10.5*, 2002.
- [LA95] J. Lewis and R. Agarwal. Airfoil design via control theory using the full-potential and Euler equations. *The Forum on CFD for Design and Optimization (IMECE 95)*, San Fransisco, CA, 1995.

- [Lio71] J. L. Lions. *Optimal Control of Systems Governed by Partial Differential Equations*. Translated by S. K. Mitter. Springer-Verlag, 1971.
- [LS93] M. S. Liou and Ch. Steffen. A new flux splitting scheme. *Journal of Computational Physics*, 107(1):23–39, 1993.
- [MAS96] G. I. Marchuk, V. I. Agoshkov, and V. P. Shutyaev. *Adjoint Equations and Perturbation Algorithms*. CRC Press, 1996.
- [NJ01] S. Nadarajah and A. Jameson. Studies of the continuous and discrete adjoint approaches to viscous automatic aerodynamic shape optimization. *AIAA-2001-2530*, 2001.
- [NW00] J. Nocedal and S. J. Wright. *Numerical Optimization*. Springer, 2000.
- [Pir74] O. Pironneau. On optimum design in fluid mechanics. *J. Fluid Mech.*, 64:97–110, 1974.
- [RHW86] D. E. Rumelhart, G. E. Hinton, and R. J. Williams. Learning internal representations by error propagation. *Parallel Data Processing (D. E. Rumelhart and J. L. McClelland, ed.)*, Cambridge, MA: The M.I.T. Press, 1:318–362, 1986.
- [RJA⁺99a] J. Reuther, A. Jameson, J. J. Alonso, M. J. Remlinger, and D. Saunders. Constrained multipoint aerodynamic shape optimization using an adjoint formulation and parallel computers, part 1. *J. Aircraft*, 36(1):51–60, 1999.
- [RJA⁺99b] J. Reuther, A. Jameson, J. J. Alonso, M. J. Remlinger, and D. Saunders. Constrained multipoint aerodynamic shape optimization using an adjoint formulation and parallel computers, part 2. *J. Aircraft*, 36(1):61–74, 1999.
- [RJF⁺96] J. Reuther, A. Jameson, J. Farmer, L. Martinelli, and D. Saunders. Aerodynamic shape optimization of complex aircraft configurations via an adjoint formulation. *AIAA 96-0094*, 1996.
- [RKe00] J. Raddatz, N. Kroll, and et al. Installation and User Handbook for FLOWer Version 116. *MEGAFLOW-1001*, 2000.
- [Sel00] V. Selmin. Multi-point aerodynamic shape optimization: The AEROSHAPE project. *ECCOMAS Proceedings*, Barcelona, Spain, 2000.
- [TKS92] S. Ta’asan, G. Kuruvila, and M. D. Salas. Aerodynamic design and optimization in one shot. *AIAA 92-0025*, 1992.
- [van] Vanderplaats Research & Development, Inc., <http://www.vrand.com>, Colorado Springs.
- [Van84] G. N. Vanderplaats. *Numerical Optimization Techniques for Engineering Design*. McGraw-Hill, 1984.
- [vLTP89] B. van Leer, C.-H. Tai, and K. G. Powell. Design of optimally smoothing multi-stage schemes for the Euler Equations. *AIAA-89-1933-CP*, 1989.

-
- [WGQ⁺03] P. Weinerfelt, N. Gauger, D. Quagliarella, B. Soemarwoto, and et al. Sensitivity computations based on continuous equations. *Progress in Aerodynamic Shape Optimisation, Chap. 3, in Notes on Numerical Fluid Mechanics*, to appear in 2003.
- [Wie00] Th. Wienberg. Description of test case T1.2-1: EUROSUP supersonic commercial aircraft. *Deliverable D1-6 of the AEROSHAPE Project*, 2000.
- [Wil01] J. Wild. Numerische Optimierung von zweidimensionalen Hochauftriebskonfigurationen durch Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen. *Dissertation, TU Braunschweig, DLR-FB 2001-11*, 2001.

Curriculum Vitae

Nicolas Ralph Gauger

Institut für Aerodynamik und Strömungstechnik
Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt e. V.
38108 Braunschweig

Juli 2003

Geburtsdatum: 29. Juli 1971
Geburtsort: Frankfurt a. M.
Familienstand: ledig
Adresse: Hopfengarten 1
38102 Braunschweig

Lebenslauf

- 08.78 – 06.91 Besuch der Grundschule, Orientierungsstufe
und des Gymnasiums in Burgdorf
06.91 Abitur
- 07.91 – 06.92 Grundwehrdienst als Sanitätssoldat
in Hildesheim und Hannover
- 10.92 – 03.98 Studium an der Universität Hannover
Fachrichtung Mathematik (Diplom)
Nebenfach Physik
09.94 Vordiplom
03.98 Diplom
- 10.94 – 03.98 Wissenschaftliche Hilfskraft an der
Universität Hannover
Institut für Angewandte Mathematik
- 04.98 – 09.00 Promotionstipendiat / Doktorand am
Deutschen Zentrum für Luft- und Raumfahrt e. V.
Institut für Entwurfsaerodynamik (mittlerweile
Institut für Aerodynamik und Strömungstechnik),
Braunschweig
- 10.00 – 03.02 Zeitvertrag als Wissenschaftlicher Mitarbeiter am
Deutschen Zentrum für Luft- und Raumfahrt e. V.
Institut für Aerodynamik und Strömungstechnik,
Braunschweig
- seit 04.02 Dauervertrag als Wissenschaftlicher Mitarbeiter am
Deutschen Zentrum für Luft- und Raumfahrt e. V.
Institut für Aerodynamik und Strömungstechnik,
Braunschweig